

## FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMY

Rozwiążcie te zadania do dnia 10.06.2016 i zostawcie rozwiązania w sekretariacie.

### 1 Wzory

Niech  $a > 0$ , oraz niech  $x, y$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy:

1.  $a^0 = 1, a^1 = a$
2.  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3.  $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$

DEFINICJA LOGARYTMU ( $a \in (0, 1) \cup (1, \infty), b > 0$ )

$$\log_a(b) = x \leftrightarrow a^x = b$$

Dla  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  oraz  $b, c > 0$  mamy:

1.  $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$
2.  $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
3.  $\log_a(b^c) = c \log_a(b)$
4.  $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$  ( $c \neq 1$ )

### 2 Zadania

**Zadanie 1.** Działanie  $\diamond$  nazywamy łączne, jeśli  $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$ . Przykładami działań łącznych są dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych. Dla liczb dodatnich  $x, y$  określmy

$$x \diamond y = x^y .$$

Czy jest to działanie łączne?

**Zadanie 2.** Wyprowadź, korzystając tylko ze wzorów znajdujących na początku tej listy zadań następujący wzór:

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

**Zadanie 3.** Wyprowadź, korzystając tylko ze wzoru (4) znajdującego na początku tej listy zadań, następujący wzór:

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

**Zadanie 4.** Naszkicuj wykresy następujących funkcji:

1.  $f_1(x) = 2^{-x^2}$

2.  $f_2(x) = \frac{1}{x}$

3.  $f_3(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

**Zadanie 5.** Uprość następujące wyrażenia:

1.  $4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}$

2.  $2^{\log_4(x)}, \log_4(2^x)$

3.  $\log_{\sqrt[5]{13}}(121) \cdot \log_{11}(13)$

**Zadanie 6.** Jaki jest związek między funkcjami  $f(x) = \log_2(x)$  oraz  $g(x) = \log_4(x)$  ?

**Zadanie 7.** Rozwiąż następujące równania:

1.  $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x + 1) = 3$

2.  $x^{\log_2(\sqrt{x})-1} = \sqrt{8}$

3.  $\log_{x+5}(9) = 2$

4.  $5 \log_3(x) - 2 \log_9(x) = 12$

*Uwaga:* Przed przystąpieniem do rozwiązywania tych równań wyznacz najpierw ich dziedzinę, czyli zbiór tych  $x$  dla których występujące w tych równaniach wyrażenia mają sens.

**Zadanie 8.** Liczbę Eulera  $e$  przybliża się za pomocą wzoru

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Przybliżenie to jest tym dokładniejsze im większa jest liczba  $n$ . A dokładniej: błąd tego przybliżenia nie przekracza  $\frac{1}{n!}$ . Zastosuj ten wzór do wyznaczenia przybliżenia liczby  $e$  z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku.

Powodzenia,  
Jacek Cichoń