ZSA: Iloczyn skalarny i odległość w $\mathbb{R}^n$
Lista zadań

Szymon Żeberski
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 2.11.2015

Ex. 1 — Obliczenia prowadzimy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,2,-3)$ i $\vec{c} = (0,-1,1)$.

1. Wyznacz $\left\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{c} \right\rangle$.
2. Wyznacz $||\vec{a}||$ oraz $||\vec{c}||$.
3. Znajdź wektor prostopadły do wektora $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
4. Wyznacz wszystkie wektory prostopadłe do wektora $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Ex. 2 — Załóżmy, że $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 1 = ||\vec{a}|| = ||\vec{b}||$.

1. Oblicz $\left\langle 3\vec{a}, \vec{a}-2\vec{b} \right\rangle$,
2. Oblicz $||3\vec{a}-2\vec{b}||$.

Ex. 3 — Korzystając z definicji odległości w $\mathbb{R}^n$: $d(\vec{x},\vec{y}) = ||\vec{x}-\vec{y}||$ oraz udowodnionej na wykładzie nierówności trójkąta dla normy udowodnij, że d spełnia aksjomaty metryki, tzn.:

1. $d(\vec{x},\vec{y}) \geqslant 0$ oraz $d(\vec{x},\vec{y}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{x} = \vec{y}$,
2. $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$,
3. $d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z}) \leqslant d(\vec{x},\vec{z})$.

Ex. 4 — Udowodnij tożsamość równoległoboku

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = 2(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2).$$

Ex. 5 — Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots x_n$ zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ex. 6 — Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots a_n$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $b_1, b_2, \dots b_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Powodzenia,
Szymon Żeberski