ZSA: Ciała liczbowe $\mathbb{Z}_p$
Lista zadań

Robert Rałowski
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 18.01.2016

Ex. 1 — Niech $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_kx^k$, $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m$ będą wielomianami o współczynnikach całkowitych, natomiast $n \in \mathbb{N}$ będzie dodatnią liczbą naturalną. Pokaż że, jeżeli $a \equiv b \mod n$ to $f(a) \equiv g(b) \mod n$.

Ex. 2 — Oblicz w ciele $\mathbb{Z}_p$:

$$\text{dla } p = 5 \qquad \frac{3^{20}}{4}, \quad \left(\frac{2+3^{-1}}{4^7+3^{-1}}\right)^{-1}, \quad \frac{2^{2016}+1}{3^{2015}},$$

$$\text{dla } p = 7 \qquad \frac{6^{20}}{4}, \quad \left(\frac{2+4^{-1}}{5^9+5^{-1}}\right)^{-1}, \quad \frac{2^{2016}+1}{5^{2015}},$$

$$\text{dla } p = 23 \qquad \frac{3^{20}}{4}, \quad \left(\frac{2+9^{-1}}{3^7+21^{-1}}\right)^{-1}, \quad \frac{7^{2016}+1}{11^{2015}}.$$

Ex. 3 — Rozwiąż równania w ciele $\mathbb{Z}_p$

$$\text{dla } p = 5 \qquad x^4 = 1, \quad 3 + 4x = 1,$$

$$\text{dla } p = 7 \qquad x^{13} = 1, \quad \frac{3+4x}{6x+5} = 1,$$

$$\text{dla } p = 23 \qquad x^{25} = 1, \quad 3 + 4x = 1.$$

Ex. 4 — Dla $p \in \{5, 7, 11\}$ znajdź $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ takie że $(\forall y \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\})(\exists n \in \mathbb{N})\ (y = x^n)$.

Ex. 5 — Niech $(K, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem skończonym. Chrarakterystykę $\chi(K)$ ciała K definiujemy jako liczbę naturalną w sposób następujący:

$$\chi(K) = \min\{n \in \mathbb{N} :\ n > 0\ \wedge\ \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ razy}} = 0\}.$$

Udowodnij, że $\chi(K)$ jest liczbą pierwszą i sprawdź że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $\chi(\mathbb{Z}_p) = p$.

Ex. 6 — Stosując twierdzenie Eulera, wyznacz w układzie dziesiętnym:

1. ostatnią cyfrę liczby $2^{2015} + 3^{2015}$,
2. ostatnie dwie cyfry liczby $3^{12} + 11^{23}$.

Ex. 7 — * Dane są trzy liczby $x, y, z \in \mathbb{Z}$ takie że $1999|(x^{666} + y^{666} - z^{666})$. Udowodnij że, $1999|x$ lub $1999|y$.

Powodzenia,
Robert Rałowski