ZSA: Tautologie
Lista zadań

Jacek Cichoń
Politechnika Wrocławska, WPPT

Wrocław • 17.02.2015

Zadanie 1

Pokaż za pomocą metody tabelek zero-jedynkowych, że następujące zdania są tautologiami:

1. $(p \wedge p) \leftrightarrow p$
2. $(p \vee p) \leftrightarrow p$
3. $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4. $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
6. $p \to (\neg p \to q)$
7. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
8. $(p \wedge p) \leftrightarrow p$, $(p \vee p) \leftrightarrow p$

Zadanie 2

Dwa zdania ψ oraz ϕ nazwamy równoważnymi, jeśli zdanie $\psi \leftrightarrow \phi$ jest tautologią.

1. Ile nierównoważnych zdań możesz zbudować za pomocą jednej zmiennej zdaniowej p korzystają ze standardowych spójników logicznych (koniuncja, alternatywa, negacja, implikacja, równoważność)?
2. Ile nierównoważnych zdań możesz zbudować za pomocą dwóch zmiennych zdaniowych p, q. korzystają ze standardowych spójników logicznych.
3. Spróbuj uogólnić poprzednie podzadania na trzy i na cztery zmienne zdaniowe.

Zadanie 3

Pokaż następujące uogólnienia praw de Morgana:

1. $(\neg(p_1 \vee \ldots \vee p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n))$
2. $(\neg(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)) \leftrightarrow ((\neg p_1) \vee \ldots \vee (\neg p_n))$
   Uwaga: Wystarczy jeśli pokażesz to dla n=3 i n=4; w przyszłości, jak omówimy metodę indukcji matematycznej, to będziesz znać łatwą metodę udowodnienia tych praw dla dowolnego n.

Zadanie 4

Działanie binarne $\bullet$ na zbiorze X nazywamy *łącznym*, jeśli $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$. Działanie $\bullet$ nazywamy *przemiennym* jeśli $x \bullet y = y \bullet x$ dla dowolnych $x, y \in X$.

1. Pokaż, że z łączności działania $\bullet$ wynika, że dla dowolnych p, q, r i s ze zbioru X mamy
$$p \bullet (q \bullet (r \bullet s)) = ((p \bullet q) \bullet r) \bullet s = ((p \bullet q) \bullet (r \bullet s)) .$$
2. Pokaż, że koniuncja oraz alternatywa są łączne oraz przemienne
3. Pokaż, że potęgowanie $\wedge$ określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich wzorem $x \wedge y = x^y$ nie jest działaniem łącznym oraz, że nie jest działaniem przemiennym.

Zadanie 5

Pokaż, że jeśli średnia arytmetyczna liczb $x_1, \ldots, x_n$ jest większa od liczby a, to co najmniej jedna z tych liczb jest większa od liczby a. Przeprowadź dokładną analizę przeprowadzonego rozumowania.

Zadanie 6

Zgodnie z używanym obecnie kalendarzem gregoriańskim rok jest przestępny, jeśli dzieli się przez 4, lecz nie dzieli się przez 100, chyba, że dzieli się przez 400. Niech p oznacza zdanie „rok R jest podzielny przez 4”, q - „rok R jest podzielny przez 100”, i r - „rok R jest podzielny przez 400”. Zapisz za pomocą zdań p, q i r zdanie „rok R jest przestępny”.

Zadanie 7

Spójnik $\triangle$, zwany *operatorem XOR*, jest zdefiniowany wzorem $p \triangle q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

1. Udowodnij łączność oraz przemienność spójnika $\triangle$.
2. Oblicz $p \triangle p$, $(p \triangle q) \triangle q$, $p \triangle (q \wedge \neg q)$, $p \triangle (q \vee \neg q)$.
3. Zastanów się jak można wykorzystać własności spójnika $\triangle$ do kodowania informacji.

Powodzenia,
Jacek Cichoń