Algebra z Geometrią Analityczną
Informatyka WPPT
Lista zadań

Jacek Cichoń, Wrocław 2015/16

1 Struktury algebraiczne

Zadanie 1 — Które z następujących struktur algebraicznych są grupami: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $((0, \infty), \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$?

Zadanie 2 — Wyznacz tabliczki działań dla grup $\mathbb{C}_5$ oraz $\mathrm{Sym}(3)$. Wyznacz dla tych grup tabliczki działania x^{-1}.

Zadanie 3 — Niech $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Oblicz π^{-1} oraz σ^{-1}.
2. Oblicz $\pi \circ \sigma$ oraz $\sigma \circ \pi$.
3. Oblicz $(\pi \circ \sigma)^{-1}$ oraz $(\sigma \circ \pi)^{-1}$.
4. Znajdź takie permutacje $x, y \in \mathrm{Sym}(5)$, że $\pi \circ x = \sigma$ oraz $y \circ \pi = \sigma$.
5. **Rzędem** elementu g w grupie $(G, \cdot)$ z elementem neutralnym e nazywamy najmniejszą liczbę naturalną $k \geq 1$ taką, że $g^k = e$ (lub ∞, jeśli takiej liczby k nie ma). Wyznacz rzędy permutacji σ oraz π w grupie $\mathrm{Sym}(5)$.

Zadanie 4 — Wyznacz rzędy wszystkich elementów w grupie $\mathbb{C}_{12}$. Sformułuj jakąś rozsądną hipotezę o rzędach elementów w grupie.

Zadanie 5 — Pokaż, że grupy $(\{-1, 1\}, \cdot)$ oraz $\mathbb{C}_2$ są izomorficzne.

Zadanie 6 — Pokaż, że grupy $(\mathbb{R}, +)$ oraz $((0, +\infty), \cdot)$ są izomorficzne.

Zadanie 7 — Spróbuj zbudować grupę $(G, \cdot)$ z elementem neutralnym e nieizomorficzną z grupą $\mathbb{C}_2$ w której dla dowolnego elementu g mamy $g \cdot g = e$.

Zadanie 8 — Pokaż, że jeśli w grupie $(G, \cdot)$ z elementem neutralnym e mamy $(\forall g \in G)(g \cdot g = e)$, to grupa ta jest **abelowa**.

Zadanie 9 — Które z następujących struktur algebraicznych są pierścieniami, a które ciałami: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

Zadanie 10 — Wyznacz tabliczki działań dla pierścieni $\mathbb{Z}_5$ oraz $\mathbb{Z}_6$.

Zadanie 11 — Rozwiąż w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$ następujące równania:

1. $2x = 3$
2. $2x + 3 = 1$

3. $2x + 4 = 1$

Zadanie 12 — Rozwiąż w ciałach $\mathbb{Z}_5$ oraz $\mathbb{Z}_7$ następujące układy równań:

1. $\begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 2x + 3y & = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y & = 3 \\ 3x + y & = 1 \end{cases}$

Zadanie 13 — Niech $(R, +, \cdot)$ będzie pierścieniem przemiennym. Pokaż, że dla dowolnych $x, y \in R$ mamy:

1. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,
2. $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot xy + y^2$,
3. $(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot xy^2 + y^3$.

Uwaga: Przez $2 \cdot x$ rozumiemy $x + x$ a przez $3 \cdot x$ rozumiemy element $x + x + x$.

2 Liczby całkowite

Zadanie 14 — Udowodnij, stosując metodę indukcji matematycznej, następujące fakty:

1. $(\forall n \geq 1)(6|(n^3 - n))$,
2. $(\forall n \geq 3)(n^2 \geq 2n + 1)$,
3. $(\forall n \geq 4)(2^n \geq n^2)$,
4. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

Zadanie 15 — Oblicz, stosując algorytm Euklidesa, NWD oraz NWW dla następujących par liczb naturalnych: $(12, 40)$, $(11, 17)$, $(570, 348)$, $(12345, 67890)$.

Zadanie 16 — Oblicz, stosując rozkład liczb na czynniki pierwsze, NWD oraz NWW dla następujących par liczb naturalnych: $(12, 40)$, $(11, 17)$, $(570, 348)$, $(12345, 67890)$.

Zadanie 17 — Znajdź wszystkie pary (n, m) liczb naturalnych takich, że $\mathrm{NWD}(n, m) = 18$ oraz $\mathrm{NWW}(n, m) = 108$.

Zadanie 18 — Pokaż, że $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathrm{NDW}(n, n + 1) = 1)$.

Zadanie 19 — Niech $F_0, F_1, F_2, \ldots$ będą liczbami Fibonacciego: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla wszystkich $n \geq 1$. Pokaż, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy $\mathrm{NWD}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
Wskazówka: Zastosuj metodę indukcji matematycznej; skorzystaj z tego, że $\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(a - b, b)$ dla $a > b$.

Zadanie 20 — Niech $f(n) = n^2 + n + 41$. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $f(n)$ nie jest liczbą pierwszą. Wskazówka: Wszyskie poprawne metody są dozwolone..

Zadanie 21 — Niech $A \subseteq \mathbb{Z}$ będzie podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ (czyli A ma następujące własności: $a, b \in A \to a + b \in A$ oraz $a \in A \to -a \in A$). Pokaż, że istnieje liczba naturalna k taka, że $A = \{k \cdot x : x \in \mathbb{Z}\}$. Wskazówka: Przyjrzyj się liczbie $\min(A \cap (\mathbb{N} \setminus \{0\}))$.

3 Liczby zespolone

3.1 Podstawowe własności

Zadanie 22 — Niech $a = 2 + 3i$ oraz $b = 1 - i$.

1. Oblicz $a + b$, $a - b$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$
2. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej wszystkie powyższe liczby.
3. Oblicz $\overline{a}$, $\overline{b}$, $|a|$, $|b|$.

Zadanie 23 — Rozwiąż w ciele liczb zespolonych następujące równania:

1. $(1 + i) \cdot (2 + z) = 3i$,
2. $(2 + i) \cdot (1 + 2z) = 3 + i$

Zadanie 24 — Rozwiąż w ciele liczb zespolonych następujące układy równań:

1. $\begin{cases} x + 2iy & = 3 \\ ix + 3y & = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} ix + y & = 1 + i \\ 3x + 2y & = i \end{cases}$

Zadanie 25 — Rozwiąż w ciele liczb zespolonych następujące równania:

1. $z^2 = -3$,
2. $z^2 + z + 1 = 0$

Zadanie 26 — Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pokaż, że

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4. $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$

Zadanie 27 — Pokaż, że struktura $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$ jest grupą izomorficzną z grupą $\mathbb{C}_4$.

Zadanie 28 — Naszkicuj następujące zbiory:

1. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 1\}$,
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| < 1\}$,
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 2\}$,
4. $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z - 1| \leq 1\}$,
5. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$.

Zadanie 29 — Niech $K = \mathbb{Z}_3$. Nad ciałem K budujemy „zbiór liczb zespolonych modulo 3”: na zbiorze par $K \times K$ określamy działania $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ oraz $(a, b)\cdot(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$ (działania + i $\cdot$ wewnątrz par oznaczają działania modulo 3). Pokaż, że struktura $(K \times K, +, \cdot)$ jest dziewięcio-elementowym ciałem.

1. W grupie $(K \times K, +)$ wyznacz rząd elementu $(1, 0)$.
2. Dlaczego ta sama konstrukcja zastosowana do ciała $\mathbb{Z}_5$ nie daje ciała?
3. Uzasadnij, że po zastosowaniu tej konstrukcji do ciała $\mathbb{Z}_{11}$ otrzymamy ciało o 121 elementach.

Zadanie 30 — Niech $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Pokaż, że $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ jest pierścieniem
2. Wyznacz elementy odwracalne w $\mathbb{Z}[i]$, tzn. znajdź takie liczby $x \in \mathbb{Z}[i]$, ze istnieje $y \in \mathbb{Z}[i]$, taki że $x \cdot y = 1$.
3. Wyznacz elementy odwracalne w $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Uwaga: Rozważany pierścień nazywa się pierścieniem liczb Gaussa.

Zadanie 31 — Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb zespolonych spełniających następujące warunki:

1. $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0$
2. $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 9$
3. $|z^2 - i| = |z^2 + i|$

Zadanie 32 — Wyznacz takie liczby zespolone z dla których $\mathrm{Re}(z^2) = 1$ oraz $|z| = 3$.

Zadanie 33 — Pokaż, że dla dowolnych liczb zepolonych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Zadanie 34 — Pokaż, że struktura $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = (\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ jest ciałem.

Zadanie 35 — Niech $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ oraz $\mathcal{H} = (H, \star)$ będą grupami. Rozważamy strukturę

$$\mathcal{G} \times \mathcal{H} = (G \times H, \circ)$$

(przez $G \times H$ oznaczamy iloczyn kartezjański zbiorów G i H, czyli zbiór $\{(x, y) : x \in G \wedge y \in H\}$) z działaniem $\circ$ określonym wzorem $(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \star h_2)$.

Uwaga: Grupę tę nazywamy produktem grup $\mathcal{G}$ oraz $\mathcal{H}$.

1. Pokaż, że $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ jest grupą
2. Pokaż, że grupy $\mathbb{C}_4$ oraz $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$ nie sa izomorficzne.
3. Pokaż, że jeśli G jest grupą cztero-elementową to G jest izomorficzna z grupą $\mathbb{C}_4$ lub z grupą $\mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_2$.

3.2 Postać trygonometryczna

Zadanie 36 — Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby: 2, $3i$, $1+i$, $-i$, $1-i$, $\sqrt{2}-i$, $5 - 5i$.

Zadanie 37 — Oblicz $(1 + i)^{10}$, $\left(\frac{5+7i}{1-6i}\right)^{11}$, $(\sqrt{3} + i)^{12}$.

Zadanie 38 — Wyznacz moduły i argumenty główne następujących liczb: $\frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}$, $\frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{(1-i)^5}$.

Zadanie 39 — Wyznacz wszystkie takie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$, że $z^2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 40 — Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyraź $\sin(3t)$ za pomocą funkcji $\sin(t)$.

Zadanie 41 — Oblicz sumę $1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{10}$.

Zadanie 42 — Wyznacz następujące pierwiastki: $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[2]{1+i}$.

Zadanie 43 — Rozwiąż nastepujące równania

1. $iz^2 + z + i = 0$,

2. $iz^2 + z + 1 = 0$.

Zadanie 44 — Znajdź takie liczby $z \in \mathbb{C}$, że $z^5 = 1$ oraz $z^7 = 1$.

* **Zadanie 45 —** Na wszystkich bokach równoległoboku zbudowano zewnętrzne kwadraty. Pokaż, że środki tych kwadratów tworzą kwadrat.

Zadanie 46 — Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie dodatnią liczbą naturalną. Pokaż, że zbiór $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ z mnożeniem jest grupą izomorficzną z grupą $\mathbb{C}_n$.

Zadanie 47 — Załóżmy, że z jest taką liczbą zespoloną, że $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\frac{\pi}{100})$. Oblicz $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$.
Wskazówka: Zapisz rozwiązania równania $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\pi/100)$ w postaci trygonometrycznej.

4 Wielomiany

Zadanie 48 — Oblicz sumy, różnice i iloczyny następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{C}[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 1$, $Q(x) = -x^3 + 2x - 1$
2. $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $Q(x) = x - 1$
3. $P(x) = (1 + i)x^2 + 2x + 2i$, $Q(x) = x^3 + ix + 1$

Zadanie 49 — Oblicz sumy, różnice i iloczyny następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 1$, $Q(x) = 4x^3 + 2x + 1$
2. $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $Q(x) = x + 4$

Zadanie 50 — Oblicz ilorazy oraz reszty z dzieleń następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 + 1$
2. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + x + 1$
3. $P(x) = x^5 + 2x + 1$, $Q(x) = x^3 + x + 1$

Zadanie 51 — Oblicz ilorazy oraz reszty z dzieleń następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$:

1. $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 + 1$
2. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 2$, $Q(x) = x^2 + x + 1$
3. $P(x) = x^5 + 2x + 1$, $Q(x) = x^3 + x + 1$

Zadanie 52 — Zastosuj schemat Hornera do podzielenia z resztą następujących par wielomianów w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$:

1. $P(x) = 4x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 1$, $Q(x) = x - 3$
2. $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^3 + x - 1$, $Q(x) = x - 1$

Zadanie 53 — Znajdź wszystkie pierwiastki całkowite następujących wielomianów:

1. $2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 4x - 3$
2. $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x - 5$
3. $-3 + 7x - 5x^2 + x^3$

Zadanie 54 — Znajdź wszystkie pierwiastki wymierne następujących wielomianów:

1. $2x^3 + x^2 + x - 1$

2. $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1$
3. $6x^5 + 7x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 3x$

Zadanie 55 — Reszta z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez $x - 1$ jest równa 3, a reszta z dzielenia $f(x)$ przez $x - 4$ jest równa 5. wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez $(x - 1)(x - 4)$.

Zadanie 56 — Pokaż, że jeśli $a \neq b$, to reszta z dzielenia wielomianu ϕ przez wielomian $(x-a)(x-b)$ jest równa

$$\frac{\phi(a) - \phi(b)}{a - b}x + \frac{b\phi(a) - a\phi(b)}{b - a} .$$

Zadanie 57 — Pokaż, że reszta w dzielenie wielomianu $\phi(x)$ przez $(x-a)^2$ wynosi $\phi'(a)(x-a)+\phi(a)$.

Zadanie 58 — Podaj warunki konieczne i wystarczające na to aby wielomiany x^2+px+q i x^3+px+q miały pierwiastki wielokrotne.

Zadanie 59 — Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $p(x) \in K[x]$ oraz dowolnego $c \in K$ mamy $p(x+c)' = p'(x+c)$.

Zadanie 60 — Pokaż, że jeśli $\phi'(x)|\phi(x)$ to $\phi(x) = a(x - b)^n$ dla pewnych $a, b \in K$ oraz $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka: Jeśli $\phi'(x)|\phi(x)$ to $\phi(x) = \phi'(x)(x - b)$ dla pewnego b. Skorzystaj następnie z poprzedniego zadania.

Zadanie 61 — Wyznacz:

1. $NWD(x^4 - 4, x^4 + 4x^2 + 4)$,
2. $NWD(x^5 - 1, x^4 - 1)$,
3. $NWD(2x^5 - 1, x^4 - 1)$.

Zadanie 62 — Dla podanych par wielomianów $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ wyznacz wielomiany $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $NWD(P, Q) = \alpha \cdot P + \beta \cdot Q$:

1. $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x^2 - 1$
2. $P(x) = x^4 - 1, Q(x) = x^2 + 1$

* **Zadanie 63 —** Dla jakich liczb całkowitych p wielomian $P(x) = x^{13} + x + 90$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = x^2 - x - p$?
Wskazówka: Zauważ, że $Q(0) = Q(1) = -p$.

Zadanie 64 — Pokaż, stosując czysto algebraiczne środki, że każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ nieparzystego rzędu ma rzeczywisty pierwiastek.

Zadanie 65 — . Niech $\epsilon_{n,k} = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$. Pokaż, że

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \epsilon_{n,k}) .$$

Zadanie 66 — Znajdź rozkłady wielomianów $x^5 - 1$, $x^6 - 1$ i $x^8 - 1$ na iloczyn nierozkładalnych wielomianów z pierścienia $\mathbb{R}[x]$

Zadanie 67 — Pokaż, że wielomiany następujące wielomiany są nierozkładalne w $\mathbb{Q}[x]$:

1. $x^7 + 6x^2 - 18x^3 + 42x + 12$

2. $x^3 - 3x - 1$,
3. $x^4 + x^2 - 1$

Zadanie 68 — Niech $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$ będą parami różne oraz, że $p(a) = p(b) = p(c) = -1$. Pokaż, że wielomian $p(x)$ nie ma zer całkowitych.

* **Zadanie 69 —** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą parami różnymi liczbami całkowitymi. Pokaż, że wielomian $(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$.
Wskazówka: Załóż, że $w(x) = u(x)v(x)$; przyjrzyj się najpierw wartością $u(a_k)v(a_k)$, a potem wartością $u(a_k) + v(a_k)$.

* **Zadanie 70 —** Załóżmy, że wielomian $w(x) \in \mathbb{C}[x]$ spełnia równanie funkcyjne $w(x^2) = (w(x))^2$. Pokaż, że $w = 0$ lub $w(x) = x^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka: Zauważ, że jeśli $w(x) = 0$, to również $w(x^2) = 0$. Z tego wywnioskuj, że jeśli w jest niezerowy, to nie może mieć niezerowych pierwiastków zespolonych o module różnym od 1. Zauważ następnie, że jeśli $w(x) = 0$ oraz $y^2 = x$ to również $w(y) = 0$.

Zadanie 71 — Znajdź niezerowy wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ którego pierwiastkiem jest liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Zadanie 72 — Wyznacz wszystkie nierozkładalne wielomiany pierścienia $Z_2[x]$ stopnia 4 oraz 5.

Zadanie 73 — Pokaż, że charakterystyka ciała jest równa zero lub jest liczbą pierwszą.

Zadanie 74 — Rozwiąż równanie $x^3 - 6x - 6 = 0$.

5 Przestrzeń $\mathbb{R}^n$

Zadanie 75 — Wyznacz zbiory

1. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x}, (1,1) \rangle = 0\}$
2. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{x}, (1,1,1) \rangle = 0\}$
3. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - (0,0,1)\| = 1\}$

Zadanie 76 — Pokaż, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ mamy $\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle a\vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle a\vec{x}, \vec{z} \rangle$.

Zadanie 77 — Pokaż, że dla dowolnych $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x} + \vec{y}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\|}{4} .$$

Zadanie 78 — Pokaż, że $|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

Zadanie 79 — Ustalmy punkty $A = (0, \ldots, 0)$, $B, C \in \mathbb{R}^n$. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach A, B, C. Jaka jest długość wysokości w tym trójkącie „opuszczonej” z wierzchołka C na krawędź AB?

Zadanie 80 — Wyznacz współrzędne punktu środkowego trójkąta wyznaczonego przez końce wektorów $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$.

6 Przestrzenie wektorowe

Zadanie 81 — Niech K będzie ciałem.

1. Pokaż, że $K[x]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.
2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy zbiór $K_n[x] = \{w \in K[x] : deg(w) \leq n\}$. Pokaż, że że $K_n[x]$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem K.

Zadanie 82 — Pokaż, że w dowolnej przestrzeni wektorowej V nad dowolnym ciałem K prawdziwe są następujące fakty:

1. $(\forall \vec{x} \in V)(0 \cdot \vec{x} = \vec{0})$,
2. $(\forall \lambda \in K)(\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0})$,
3. $(\forall \lambda \in K)(\forall \vec{x} \in V)\left((-\lambda) \cdot \vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -(\lambda \cdot \vec{x})\right)$.

Zadanie 83 — Pokaż, że jeśli B jest zbiorem liniowo niezależnym, to $\vec{0} \notin B$.

Zadanie 84 — Załóżmy, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3, f_4\} \subseteq V$ jest liniowo niezależny.

1. Pokaż, że zbiór $\{f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, f_1 + f_2 + f_3 + f_4\}$ jest liniowo niezależny.
2. Pokaż, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3, f_3 + f_4\}$ jest liniowo niezależny.
3. Pokaż, że zbiór $\{f_1, f_2, f_3 - f_4, f_4\}$ jest liniowo niezależny.
4. Uogólnij powyższe fakty na większą liczbę elementów.

Zadanie 85 — Niech $V = \mathbb{R}^2$, $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ oraz $B = \{f_1, f_2\}$.

1. Pokaż, że zbiór B jest bazą przestrzeni V.
2. Niech $(x, y) \in V$. Znajdź takie liczby rzeczywiste λ, μ, że $(x, y) = \lambda \cdot f_1 + \mu \cdot f_2$.

Zadanie 86 — Rozszerz zbiór wektorów $\{(1, 1, 1), (2, 1, 3)\}$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Wskazówka: Znajdź taki wektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, że $\langle \vec{a}, (1, 1, 1) \rangle = 0$ oraz $\langle \vec{a}, (2, 1, 3) \rangle = 0$.

Zadanie 87 — Niech K będzie k elementowym ciałem. Załóżmy, że zbiór $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ jest liniowo niezależny. Pokaż, że wtedy zbiór $Lin(F)$ ma k^n elementów.

Zadanie 88 — Niech K będzie ciałem.

1. Pokaż, że zbiór wielomianów $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $K_n[x]$.
2. Pokaż, że zbiór wielomianów $\{1, x - 1, (x - 1)^2, \ldots, (x - 1)^n\}$ jest również bazą przestrzeni liniowej $K_n[x]$.

Zadanie 89 — Pokaż, że niepusty podzbiór H przestrzeni wektorowej V jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $Lin(H) = H$.

Zadanie 90 — Pokaż, że jeśli $\mathcal{S}$ jest niepustą rodziną podprzestrzeni linowych przestrzeni V, to zbiór $\bigcap \mathcal{S}$ jest również podprzestrzenia liniową przestrzeni V.

Zadanie 91 — Niech E będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni wektorowej V. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich podprzestrzeni liniowych przestrzeni V które zawierają zbiór E. Pokaż, że $Lin(E) = \bigcap \mathcal{S}$.

7 Odwzorowania liniowe i macierze

Zadanie 92 — Niech $F : V \to H$ będzie odwzorowaniem liniowym skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych V i K.

1. Pokaż, że $dim(rng(F)) \leq dim(V)$.
2. Kiedy $dim(V) = dim(rng(F))$?

Zadanie 93 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Oblicz $2A + 3B$, $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$.

Zadanie 94 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz $A - 2B$, $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$.

Zadanie 95 — Oblicz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 96 — Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadana wzorem

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Wyznacz przestrzenie $ker(F)$ oraz $rng(F)$ oraz ich wymiary.

Zadanie 97 — Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym zadanym wzorem $F(x, y, z) = (2x + z, x - y + z, x + 2y)$. Wyznacz macierz przekształcenia F w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 98 — Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem liniowym zadanym wzorem $F(x, y) = (x - y, -x + y)$.

1. Wyznacz macierz przekształcenia F w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^2$.
2. Wyznacz macierz przekształcenia F w bazie uporządkowanej $\{f_1 = (1, 1), f_2 = (1, -1)\}$.

Zadanie 99 — Niech $A \in K_{m \times n}$ oraz $B \in K_{p,m}$. Pokaż, że $(B \circ A)^T = A^T \circ B^T$.

Zadanie 100 — Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Wyznacz kilka pierwszych potęg A^n, odgadnij ogólny wzór na A^n i następnie udowodnij go, stosując metodę indukcji matematycznej.

Zadanie 101 — Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Wyznacz kilka pierwszych potęg A^n, odgadnij ogólny wzór na A^n i następnie udowodnij go, stosując metodę indukcji matematycznej.

Zadanie 102 — Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją, która każdemu punktowi przyporządkowuje jego odbicie względem prostej zadanej równaniem $y = \sqrt{3}x$. Pokaż, że F jest transformacją liniową i wyznacz jej macierz w standardowej bazie.
Wskazówka: $\sqrt{3} = \tan(60^o)$.

Zadanie 103 — Niech $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

1. Pokaż, że rodzina macierzy $\{R_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ jest grupą ze względu na operację mnożenia macierzy.
2. Pokaż, że powyższa grupa jest izomorficzna z grupą $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$.

Zadanie 104 — Opisz wszystkie przekształcenia liniowe z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 105 — Opisz wszystkie przekształcenia liniowe z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}$.

Zadanie 106 — Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem $F(x, y) = (ax, by)$, gdzie $a, b > 0$. Niech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Wyznacz macierz odwzorowania F.
2. Wyznacz obraz $\vec{F}[S]$.
3. Wyznacz powierzchnie zbioru $\vec{F}[S]$.
4. Wyznacz macierz F^{-1} w standardowej bazie $\mathbb{R}^2$.

* **Zadanie 107 —** Śladem macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]$ nazywamy liczbę $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Pokaż, że dla dowolnych dwóch macierzy kwadratowych A i B tego samego rozmiaru mamy:

1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
2. $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$.

Zadanie 108 — Pokaż, że nie istnieją macierze kwadratowe A, B tego samego rozmiaru takie, że

$$A \cdot B - B \cdot A = I \ ,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową.

Zadanie 109 — Niech $F : \mathbb{C} \to M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$ będzie określone wzorem

$$f(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \ .$$

Pokaż, że:

1. $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$
2. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$
3. $|z| = \det(f(z))$

Zadanie 110 — Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami liniowymi wymiarów n oraz m. Wyznacz wymiar przestrzeni $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ odwzorowań liniowych z V_1 w V_2.
Wskazówka: Ustal bazy B, C obu przestrzeni. Przyglądnij się przestrzeni macierzy $\{M_{C,B}(F) : F \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\}$. Wystarczy, że wskażesz jedną bazę tej przestrzeni.

Zadanie 111 — Czy z równania macierzowego $A \cdot B = A \cdot C$ wynika $B = C$, jeśli $A \neq 0$?

Zadanie 112 — Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Oblicz

$$A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I \ .$$

Zadanie 113 — Wyznacz równanie obrotu płaszczyzny wokół punktu (x_0, y_0) o kąt α. Wskazówka: Zastosuj metodę zapisu transformacji afinicznych płaszczyzny z pomocą macierze rozmiaru 3×3. Przesuń najpierw punkt (x_0, y_0) do środka układu współrzędnych..

8 Wyznaczniki

Zadanie 114 — Wyznacz znak permutacji $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.
Wskazówka: Zapisz π jako superpozycję $n - 1$ transpozycji.

Zadanie 115 — Jaka jest złożoność obliczeniowa algorytmu wyznaczania znaku permutacji opartego na definicji $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$, gdzie $I(\pi)$ oznacza liczbę inwersji w permutacji π?

Zadanie 116 — Niech $n \geq 2$ oraz $A_n = \{\pi \in S_n : \mathrm{sgn}(\pi) = 1\}$. Pokaż, że $|A_n| = \frac{1}{2}n!$.

Zadanie 117 — Wyznacz wyznaczniki następujących macierzy:

1. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & i & 3 & 4 \\ 1 & 2i & 2 & i+1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 118 — Oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & b & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & c & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & d & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & e \end{bmatrix}$$

Zadanie 119 — Oszacuj złożoność obliczeniową, mierzoną liczbą wykonywanych operacji arytmetycznych, algorytmu wyznaczania wyznacznika macierzy kwadratowej A rozmiaru $n \times n$ opartego bezpośrednio na definicji

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(a)} .$$

Do ostatecznego oszacowania złożoności wykorzystaj wzór Stirlinga $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Zadanie 120 — Zaproponuj algorytmu wyznaczania wyznacznika macierzy kwadratowej o złożoności $O(n^3)$ (podobnie jak wyżej, mierzoną liczbą wykonywanych operacji arytmetycznych) gdzie n jest liczbą kolumn danej macierzy.

Zadanie 121 — Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

(w macierzy tej wszystkie wyrazy poza leżącymi na przekątnej łączącą lewy górny róg z prawym dolnym rogiem są równe zero).

Uwaga: Macierz tej postaci nazywamy diagonalną i oznacza się ją często przez $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

1. Oblicz $\det(A)$.
2. Pokaż, że $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) \cdot \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$.
3. Wyznacz A^k dla $k \in \mathbb{N}$

Zadanie 122 — Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(w macierzy tej wszystkie wyrazy poza leżącymi na przekątnej łączącą lewy dolny róg z prawym górnym rogiem są równe zero). Oblicz $\det(A)$.

Zadanie 123 — Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 124 — Załóżmy, że $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest taką macierzą rozmiaru $n \times n$ taką, że $a_{i,j} \in \{0, 2\}$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Pokaż, że $\det A$ jest liczbą podzielną przez 2^n.

Zadanie 125 — Załóżmy, że $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest taką macierzą rozmiaru $n \times n$ taką, że $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Pokaż, że $\det A$ jest liczbą podzielną przez 2^{n-1}.

Zadanie 126 — Znajdź macierze odwrotne do następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 127 — Rozwiąż, stosując wzory Cramera, następujące układy równań:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y & = & 1 \\ x + y & = & 2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + 3y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 2 \\ 3x - 2y + 2z & = & 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 1 \\ x - y - z & = & 2 \end{array} \right.$$

Zadanie 128 — Zastosuj wzory Cramera do znalezienia równanie paraboli przechodzącej przez punkty $(1, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, 1)$.

Zadanie 129 — Zastosuj wzory Cramera do wyznaczenia wielomianu trzeciego stopnia $y = ax^3 + bx^2 + c^x + d$ przechodzącego przez punkty $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(2, 0)$ $(3, 1)$.

Zadanie 130 — Znajdź liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{a}{(x-2)^2} - \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

Zadanie 131 — Wyznacz rzędy następujących macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 132 — Załóżmy, że macierze A i B są tego same go rozmiaru. Pokaż, że

$$\mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

Wskazówka: Skorzystaj bezpośrednio z definicji: $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Lin}([k_1,\dots,k_n]))$.

Zadanie 133 — Niech $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ oraz $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ będą dwoma ciągami elementów ustalonego ciała. Niech $c_{i,j} = a_i \cdot b_j$. Niech $C = [c_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ Pokaż, że $\mathrm{rank}(C) \le 1$.

Zadanie 134 — Dane jest sześć liczb rzeczywistych x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2 takich, że $x_1 \neq x_2$. Pokaż, że istnieje wielomian $w(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia ≤ 3 taki,że $w(x_1) = y_1$, $w(x_2) = y_2$ oraz $w'(x_1) = t_1$, $w'(x_2) = t_2$.

Zadanie 135 — Stosując metodą eliminacji Gaussa-Jordana rozwiąż następujące układy równań:

$$\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ x+3y &= 2 \end{cases} \begin{cases} 2x+3y+z &= 1 \\ x+2y-z &= 2 \\ 3x-2y+2z &= 1 \end{cases} \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \\ 3x+y-z &= 3 \end{cases} \begin{cases} 2x+3y-z &= 2 \\ 2x+4y+z &= 4 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases}$$

Zadanie 136 — Niech $1 \le i < j \le n$. Znajdź macierz $E \in K_{n\times n}$ taką, że $E \cdot A$ jest macierzą powstającą z macierzy $A \in K_{n\times n}$ poprzez zamianę wierszy i oraz j.

Zadanie 137 — Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznacz macierze odwrotne następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 138 — Dla jakich wartości a, b następująca macierz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

jest odwracalna? Dla a i b spełniających ten warunek wyznacz macierz A^{-1}.

Zadanie 139 — Przetestuj polecenia typu

```
solve x+y+z=1,x-y+z=2, x+2*y + 3*z = 3
inverse matrix {{1,1},{1,2}}
```

w serwisie Wolfram Alpha.

Zadanie 140 — Załóżmy, że

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie A_{ij} i B_{ij} są macierzami rozmiaru $k \times k$ (macierze A i B są więc rozmiaru $(2k) \times (2k)$. Niech

$$C = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

Pokaż, że $C = A \cdot B$.

Uwaga: Własność ta służy do pisanie rekurencyjnych procedur mnożenia macierzy: mnożenie macierzy rozmiaru $(2n) \times (2n)$ można sprowadzić do mnożenia macierzy rozmiaru $n \times n$. Wykorzystywana jest, na przykład, w metodzie Strassena mnożenia macierzy.

9 Wektory i wartości własne

Zadanie 141 — Niech
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Znajdź wartości i wektory własne macierzy A, A^2 oraz A^{-1}.
2. Porównaj wartości $\lambda_1 + \lambda_2$ oraz $\lambda_1\lambda_2$ ze śladami i wyznacznikami macierzy A i A^2.
3. Zapisz odwzorowanie F_A w bazie złożonej z wektorów własnych macierzy A.
4. Wyznacz macierz odwzorowania $(F_A)^n$ w tej bazie dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
5. Wyznacz wzór na A^n dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 142 — Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne oraz wektory własne następującej macierzy A:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Sprawdź twierdzenie Cayley'a-Hamilton'a na przykładziej tej macierzy.

Zadanie 143 — Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Pokaż, że
$$\det(A) = \frac{1}{6}\left((\mathrm{tr}(A))^3 - 3\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^2) + 2\mathrm{tr}(A^3)\right).$$
Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia Cayley'a-Hamilton'a.

Zadanie 144 — Zastosuj twierdzenie Cayley'a-Hamilton'a do wyznaczania macierzy odwrotnej macierzy odwrotnej do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

* **Zadanie 145 —** Załóżmy, że $R \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest taką macierzą, że $R \cdot R^T = R^T \cdot R = I$ oraz $\det(R) > 0$.

1. Pokaż, że $\det(R) = \det(R^{-1}) = 1$.
2. Pokaż, że $\det(-R) = -\det(R)$.
3. Pokaż, że $\det(R - I) = \det(R^{-1} - I)$. Wskazówka: Skorzystaj z tego, że $(R - I)^T = R^T - I$.
4. Pokaż, że $\det(R^{-1} - I) = -\det(R^{-1})\det(R - I)$
5. Korzystając z poprzednich punktów pokaż, że $\det(R - I) = -\det(R - I)$.
6. Pokaż, że istnieje taki wektor $x \in \mathbb{R}^3$, że $R \cdot x^T = x^T$.

Uwaga: Udowodniliśmy (prawie) w ten sposób twierdzenie Eulera: każda izometria F przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nie zmieniająca punktu 0 ($F(0) = 0$) oraz orientacji przestrzeni ($\det(M_F) > 0$) jest obrotem względem pewnej osi .

Zadanie 146 — Zastosuj proces ortogonalizacji Grama - Schmidt'a do wektorów $u_1 = [1, 2, 1, 1]$, $u_2 = [2, 2, 0, 1]$, $u_3 = [3, 2, 1, 0]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 147 — Zastosuj proces ortogonalizacji Grama - Schmidt'a do wektorów $u_1 = [1, i, 1]$, $u_2 = [2, 2, 0]$, $u_3 = [i, 1, 0]$ w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem
$$\langle [u_1, \ldots, u_4], [v_1, \ldots, v_4] \rangle = \sum_{i=1}^{4} u_i \overline{v_i}$$

Zadanie 148 — Zastosuj metodę ortogonalizacji Grama - Schmidt'a do wielomianów $u_0 = 1$, $u_1 = x$, $u_2 = x^2$, $u_3 = x^3$ w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ z iloczynem skalarnym zadanym wzorem

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$

Efektem końcowym ma być ortonormalny układ wielomianów.
Uwaga: Otrzymamy kilka pierwszych wielomianów Legendra.

c.d.n.
Powodzenia,
Jacek Cichoń