Analiza Matematyczna I
dla Inżynierii Biomedycznej
Lista zadań

Jacek Cichoń, WPPT PWr, 2015/16

1 Logika, zbiory i notacja matematyczna

Zadanie 1 — Niech p, q, r będą **zmiennymi zdaniowymi**. Pokaż, że:

1. $\models (\neg(p \wedge \neg p))$,
2. $\models (p \vee \neg p))$,
3. $\models ((p \wedge (q \vee r)) \longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,
4. $\models (p \to q) \longleftrightarrow (\neg p \vee q)$,
5. $\models (\neg(p \to q)) \longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

Podaj interpretację dwóch pierwszych **tautologii**.

Uwaga: $\models \phi$ oznacza, że ϕ jest tautologią.

Zadanie 2 — Pokaż, że jeśli Jaś umie matematykę i Jaś nie umie matematyki, to Jaś umie fizykę.

1. Sformułuj odpowiednią tautologię.
2. Podaj inne przykłady zastosowania tej tautologii.

Zadanie 3 — Zapisz, stosując notację matematyczną, następujące **zdania** i **formuły**:

1. p jest liczbą pierwszą,
2. istnieje najmniejsza liczba naturalna,
3. nie istnieje największa liczba naturalna,
4. nie istnieje najmniejsza liczba rzeczywista dodatnia.

Zadanie 4 — Podaj interpretację następujących zdań

1. $(\forall x \in (0, \infty))(\exists n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < x)$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \vee x = y \vee x > y)$.

Zadanie 5 — Niech $R(x, y)$ oznacza, że "x jest rodzicem y". Niech $K(x)$ oznacza, że "x jest kobietą". Zdefiniuj, korzystając z notacji matematycznej oraz predykatów R i K, następujące **predykaty**:

1."x jest dziadkiem y",

2."x jest siostrą y",

3."x jest bratem y",

4."x jest ciotką y".

Zadanie 6 — Niech $A = [0, 2]$ oraz $B = [1, 3)$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Zadanie 7 — Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x, y < \frac{3}{2}\}$. Wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.

Zadanie 8 — Odcinkiem nazywamy dowolny podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że

$$(\forall a,b,c)\left(((a < b < c) \wedge (a \in A) \wedge (c \in A)) \to b \in a\right) \; .$$

Spróbuj opisać rodzinę wszystkich odcinków.

2 Liczby naturalne, wymierne i rzeczywiste

Zadanie 9 — Uprość następujące wyrażenia: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{5}}$

Zadanie 10 — Przypomnij sobie dowód tego, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 11 — Pokaż, że jeśli $q \in \mathbb{Q}$ to $\sqrt{2} + q \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 12 — Niech $a = 3.1415926535897932385\ldots$. Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy liczby

$$a_n = \frac{\lfloor a \cdot 10^n \rfloor}{10^n} \; .$$

Wyznacz pierwsze 10 wyrazów tego ciągu, tzn. oblicz liczby $a_0, a_1, \ldots, a_9$.
Uwaga: $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x..

Zadanie 13 — Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y mamy

1. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
2. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3. Z jakich własności liczb rzeczywistych korzystałaś/korzystałeś podczas dowodzenia tych wzorów?

Zadanie 14 — Dla jakich par liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość $(x+y)^2 = x^2 + y^2$?

Zadanie 15 — Pokaż, że zbiór liczb wymiernych jest zamknięty na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczbę różną od 0.

Zadanie 16 — Pokaż metodą indukcji matematycznej, że $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. **Uwaga:** Musisz również znać proste wyprowadzenie tego wzoru..

Zadanie 17 — Pokaż, korzystając ze wzoru z poprzedniego zadania, że $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$.

Zadanie 18 — Pokaż metodą indukcji matematycznej, że $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Zadanie 19 — Wyznacz samodzielnie sześć pierwszych wierszy trójkąta Pascala. Wypisz wzory na $(x+y)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$.

Zadanie 20 — Pokaż, że jeśli $0 < k \leq n$ to $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Jak można tę obserwację wykorzystać do wyznaczania wartości $\binom{n}{k}$?

Zadanie 21 — Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^a b^{n-k}$ pokaż, że

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

Zadanie 22 — Narysuj wykres wartości $\binom{20}{k}$ dla $k = 0, \ldots, 20$. Która z tych liczb jest największa? Uogólnij to spostrzeżenie dla ciągu liczb $(\binom{n}{k})_{k=1,\ldots,n}$ dla dowolnego n. Wskazówka: Możesz, np., skorzystać z funkcji KOMBINACJE programu Excel.

Zadanie 23 — Za pomocą wyszukiwarki Google narysuj wykresy różnych funkcji kwadratowych (np. wprowadź w pasku zapytań wyrażenie $x \wedge 2 - 5x + 1$). Zapoznaj się z linkami umieszczonymi na stronie `http://ki.pwr.edu.pl/StudenciOnLineTools.php`. Spróbuj narysować wykresy funkcji kwadratowych za pomocą serwisu Wolfram Alpha.

Zadanie 24 — Wyznacz następujące zbiory:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$,
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

Zadanie 25 — Podaj ograniczenia dolne i górne następujących zbiorów:

1. $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $(0, 1) \cup (3, 4]$.
3. $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$

* **Zadanie 26 —** Sformułuj samodzielnie pojęcie kresu dolnego podzbioru A zbioru liczb rzeczywistych - oznaczmy go przez $\inf(A)$. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(-A)$, gdzie $-A = \{-a : a \in A\}$. Wywnioskuj z tego, że każdy ograniczony z dołu podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny.

* **Zadanie 27 —** Niech $A = \{x \geq 0 : x^2 < 2\}$. Pokaż, że $\sup(A)^2 = 2$ (czyli, że $\sup(A) = \sqrt{2}$).

Zadanie 28 — Korzystając z tego, że $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pokaż, że $|\sin(x) + 2\cos(x)| \leq \sqrt{5}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wskazówka: Skorzystaj z nierówności Cauchy'ego.

Zadanie 29 — Pokaż, że dla dowolnego ciągu liczb $a_1, \ldots a_n$ zachodzi nierówność

$$a_1 + \ldots + a_n \leq \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \,.$$

3 Ciągi

Zadanie 30 — Pokaż, że ciąg $(1 - \frac{1}{n})^n$ jest ograniczony.

Zadanie 31 — Oblicz granice następujących ciągów:

1. $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$, $a_n = \frac{2^n+1}{2^n+3}$,
2. $b_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2+3n+1}$, $b_n = \frac{3n^2+n+5}{n^2+n+1}$,
3. $c_n = \frac{n^3+n+3}{n^2+3n+3}$, $c_n = \frac{-n^3+2n+2}{n^2+2n+1}$,
4. $d_n = \frac{2n^2+n+3}{n^5+3n+2}$, $d_n = \frac{n^2+n+3}{n^3+n^2+1}$.

Zadanie 32 — Dlaczego ciąg $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ nie jest zbieżny?

Zadanie 33 — Dlaczego ciąg $a_n = (-2)^n$ nie jest zbieżny?

Zadanie 34 — Bezpośrednio z definicji granicy ciągu pokaż, że $\lim_n \frac{n+2}{n} = 1$.

Zadanie 35 — Oblicz granice ciągów

1. $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$,
2. $b_n = \sqrt[n]{n^n + 1}$,
3. $c_n = \sqrt[n]{n2^n + n}$.

Zadanie 36 — Pokaż, że ze zbieżności ciągu (a_n) wynika zbieżność ciągu $(|a_n|)$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

Zadanie 37 — Ustalmy liczbę a. Wyznacz granicę ciągu $a_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{n}$.

Zadanie 38 — Pokaż, że jeśli $|a| < 1$ to

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a + \ldots + a^n) = \frac{1}{1-a} \,.$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru na $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

Zadanie 39 — Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = 3 + \frac{a_n}{2}$.

1. Pokaż, stosując metodę indukcji matematycznej, że $a_a < 6$ dla każdego n.
2. Pokaż, że ciąg (a_n) jest rosnący
3. Wyznacz granicę tego ciągu.

Zadanie 40 — Niech $a_0 = 1$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$. Pokaż, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony oraz znajdź jego granicę.

Zadanie 41 — Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$. Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$..

Zadanie 42 — Oblicz granicę następujących ciągów

1. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{3n+1}$,
2. $b_n = (1 - \frac{1}{n})^{2n+1}$,
3. $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$,
4. $d_n = (\frac{n-1}{n+1})^{n+1}$,
5. $e_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$.

Zadanie 43 — Oblicz następujące granice: $\lim_n \sqrt[n]{5^n + 1}$, $\lim_n \sqrt[n]{n3^n + 2}$.

Zadanie 44 — Załóżmy, że $0 \leq a \leq b$. Wyznacz granicę ciągu $\sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Zadanie 45 — Załóżmy, że $\lim_n a_n = 0$. Pokaż, że wtedy $\lim_n |a_n| = 0$.

Zadanie 46 — Oblicz $\lim_n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru $a - b = (a^2 - b^2)/(a+b)$.

Zadanie 47 — Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wyznacz granice następujących ciągów:

1. $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+n} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$
2. $b_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$
3. $c_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}}$.

Zadanie 48 — Niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Pokaż, że $\lim_n H_n = \infty$.
Wskazówka: Pokaż najpierw, że ciąg (H_n) jest rosnący. Przyjrzyj się następnie takiemu pogrupowaniu: $H_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})$. Zapisz w podobny sposób H_{16}. Spróbuj oszacować od dołu każdy z pogrupowanych składników .

4 Granice i ciągłość

Zadanie 49 — Naszkicuj wykresy funkcji

1. $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}\sin(x)$,
2. $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}\sin(10x)$,
3. $f_3(x) = \sqrt{1-x^2}\sin(100x)$,
4. $f_4(x) = \sqrt{1-x^2}\sin(200x)$.

Zadanie 50 — Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = |x| + \sqrt{1-x^2} - 1$ oraz $g(x) = |x| - \sqrt{1-x^2} - 1$.

Zadanie 51 — Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = (|x| + \sqrt{1-x^2} - 1)\cos^2(200x)$ oraz $g(x) = (|x| - \sqrt{1-x^2} - 1)\cos^2(200x)$.

Zadanie 52 — Niech $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

1. Wyznacz granice $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 1+} f(x)$, $\lim_{x\to 1-} f(x)$, $\lim_{x\to -1+} f(x)$, $\lim_{x\to -1-} f(x)$.

2. Naszkicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 53 — Niech

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & : & x < 0 \\ 0 & : & x = 0 \\ 1 & : & x > 0 \end{cases}$$

1. Pokaż, że funkcja sgn nie jest ciągła w punkcie 0.
2. Wyznacz punkty ciągłości funkcji sgn.

Zadanie 54 — Wyznacz punkty ciągłości nstępujących funkcji

1. $f_1(x) = \mathrm{sgn}(\sin(x))$,
2. $f_2(x) = \mathrm{sgn}(\cos(x))$,
3. $f_3(x) = \lfloor x \rfloor$ oraz
4. $f_4(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Zadanie 55 — Korzystając z Zadania 37 pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a

1. istnieje ciąg liczb wymiernych (a_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
2. istnieje ciąg liczb niewymiernych (b_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

Zadanie 56 — Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie.
Wskazówka: Skorzystaj z zadania 55.

Zadanie 57 — Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami $y = \frac{x}{x-1}$, $y = x - \lfloor x \rfloor$, $y = x \sin(\frac{1}{x})$, $y = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, $y = \frac{1}{x} \sin(\frac{1}{x})$ oraz wyznacz ich granice w punkcie 0.

Zadanie 58 — Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

1. $y = \frac{1}{x^2-1}$,
2. $y = \frac{x}{x^2-1}$,
3. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$,
4. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Zadanie 59 — Niech $n > 0$. Naszkicuj wykres funkcji zadanej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} .$$

Wskazówka: rozważ oddzielnie przypadek n parzystego i n nieparzystego.

Zadanie 60 — Oblicz nstępujące granice:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$,
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$,
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$.

Zadanie 61 — Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że fukcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. Wskazówka: skorzystaj z tego, że złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Zadanie 62 — Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ w nieskończoności oraz w minus nieskończoności. Wskazówka: Rozważ oddzielnie przypadek n parzystego oraz n nieparzystego.

Zadanie 63 — Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek.
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własności Darboux funkcji ciągłych.

Zadanie 64 — Załóżmy, że fukcje f i g są ciągłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

Zadanie 65 — Załóżmy, że $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0, 1]$, że $f(x) = x$.
Wskazówka: Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.

Zadanie 66 — Niech $f, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami rosnącymi. Pokaż, że złożenie $f \circ g$ jest funkcją rosnącą.

Zadanie 67 — Naszkicuj wykresy funkcji $f_1(x) = (\frac{1}{2})^x$, $f_2(x) = 1^x$, $f_3(x) = 2^x$, $f_4(x) = e^x$ oraz $f_5(x) = 3^x$.

Zadanie 68 — Naszkicuj wykresy funkcji $f_1(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, $f_3(x) = \log_2(x)$, $f_4(x) = \log_e(x)$ oraz $f_5(x) = \log_3(x)$.

Zadanie 69 — Pokaż, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą funkcji **parzystej** i nieparzystej.
Wskazówka: Rozważ funkcje $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Zadanie 70 — Niech $f(x) = \sin(x)$ oraz $g(x) = x^2$.

1. Naszkicuj wykres funkcji $f \circ g$.
2. Naszkicuj wykres funkcji $g \circ f$.

Zadanie 71 — Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

1. Sprawdź, że $x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2$. Korzystając z tego wzoru przedstaw funkcję f jako sumę funkcji liniowej oraz pewnej prostej funkcji wymiernej.
2. Korzystając z poprzedniego punktu naszkicuj ponownie wykres funkcji f.
3. Zapoznaj się z pojęciem **asymptoty ukośnej**.

Zadanie 72 — Podaj przykład ciągłej funkcji $f : [0, \infty) \to [0, 1]$ która nie osiąga wartości maksymalnej.

Zadanie 73 — Pokaż przykład takiej funkcji ciągłej $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ która nie jest ograniczona z góry ani z dołu.

Zadanie 74 — Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ jest ciągła, oraz, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Pokaż, że istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

5 Pochodne

Zadanie 75 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$
2. $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) = \frac{x^2}{x^3-x+1}$
4. $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$
5. $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$, $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
6. $f(x) = xe^x$, $g(x) = x^2e^x$, $h(x) = x^3e^x$. Wskazówka: $(e^x)' = e^x$.

Zadanie 76 — W jakich punktach funkcja $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ jest różniczkowalna?

Zadanie 77 — Znajdź przykład ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która nie różniczkowalna w nieskończonej liczbie punktów.

Zadanie 78 — W jakich przedziałach funkcje $y = x(1 - x)^2$, $y = xe^{-x}$, $y = x^2e^{-x}$ są rosnące?

Zadanie 79 — Zbadaj wykresy funkcji $y = x^2e^x$, $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = \frac{2x^2}{(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 80 — Znajdź ekstrema funkcji $y = x(a-x)$, $y = x(a-x)^2$.

Zadanie 81 — Pokaż, że jeśli funkcje f, g i h są różniczkowalne w punkcie x, to

$$(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)\,.$$

Zadanie 82 — Znajdź pole największego prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych wpisanego w elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Zadanie 83 — Pokaż, że ze wszystkich prostokątów o ustalonym obwodzie kwadrat ma największą powierzchnię.

Zadanie 84 — Pokaż, że ze wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie i o ustalonej podstawie trójkąt równoramienny ma największą powierzchnię.

Zadanie 85 — Pokaż, że ze wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie trójkąt równoboczny ma największą powierzchnię.
Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.

Zadanie 86 — Niech

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} ax+b & : x < -1 \\ x^2 & : x \geq -1 \end{cases}$$

Znajdź takie parametry a i b aby funkcja $f_{a,b}$ była różniczkowalna w każdym punkcie.

Zadanie 87 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $y = \sqrt[3]{x^3+1}$,
2. $y = \sin(x^2)$,
3. $y = e^{x^2}$,
4. $y = \left(e^{x^2}+1\right)^2$,
5. $y = 2^{\sin(x)}$, $y = \sin(\cos(x))$, $y = \sin(\cos(\sin(x)))$
6. $y = \tan^2(x)$,
7. $y = \ln(x^2+1)$, $y = \log\tan(x))$
8. $y = \ln\frac{1}{1+x^2}$,
9. $y = \arcsin(e^x)$, $y = \arccos(x^2)$
10. $y = \arctan(x^2+1)$, $y = \arctan(e^x)$

Zadanie 88 — Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

1. $f(x) = x^3e^{-x}$.
2. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$
3. $f(x) = x^2\ln(x)$
4. $f(x) = 2\ln\left(x^2+1\right)+x$

Zadanie 89 — Dlaczego funkcja $y = \ln x$ jest ciągła? Podaj możliwie prosty argument.

Zadanie 90 — Napisz równania stycznych do podanych funkcji w podanych punktach:

1. $f(x) = \ln(x+e^x)$, $P = (0, f(0)$,
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $P = (1, f(1))$.

Zadanie 91 — Korzystając z reguły d'Hospitala oblicz następujące granice

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}$,
2. $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$,
3. $\lim_{x\to 0+} x^x$. Wskazówka: skorzystaj z tego, że $t = e^{\ln t}$ dla dowolnego $t > 0$, oraz, że funkcja $f(x) = e^x$ jest ciągła.
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$,

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$,
6. $\lim_{x\to\infty} (1 - \frac{3}{x})^{2x}$,
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$

Zadanie 92 — Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

1. $y = \frac{e^x}{x}$,
2. $y = \frac{x}{1+x^2}$,
3. $y = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

Zadanie 93 — Który z punktów paraboli $y = x^2$ leży najbliżej prostej $x - y - 5 = 0$?
Wskazówka: Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $ax + by + c = 0$ wyraża się wzorem

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

.

Zadanie 94 — Znajdź pole największego prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych wpisanego w elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Zadanie 95 — Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $\sin(\sin(x))$, $\sin(\sin(\sin(x)))$
2. $\sin(\cos(\sin(x)))$

Zadanie 96 — Naszkicuj wykres funkcji $y = \arcsin(\sin(x))$ dla $x \in [0, 10\pi]$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

Zadanie 97 — Załóżmy, że $f'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Pokaż, że istnieje taka stała C, że $f(x) = C \cdot e^x$.
Wskazówka: Oblicz pochodną funkcji $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

6 Całki

Zadanie 98 — Oblicz następujące całki: $\int_0^1 x^3 dx$, $\int_0^1 \sqrt{x} dx$, $\int_0^\pi \sin(x) dx$.

Zadanie 99 — Wyznacz, bez wykonywania żadnych obliczeń, następujące całki: $\int_{-1}^1 x^3 \mathrm{d}x$, $\int_{-1}^1 (x + x^5) dx$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x) \mathrm{d}x$.

Zadanie 100 — Niech $G(c) = \int_1^c \frac{1}{x^2} dx$.

1. Zakładając, że $c > 1$ wyznacz $G(c)$
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} G(c)$
3. Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

Zadanie 101 — Wyznacz, stosując metodę całkowania przez części, następujące całki nieoznaczone:

1. $\int x \cos(x) \mathrm{d}x$, $\int x^2 \cos(x) \mathrm{d}x$, $\int x^3 \cos(x) \mathrm{d}x$
2. $\int x \sin(x) \mathrm{d}x$, $\int x^2 \sin(x) \mathrm{d}x$, $\int x^3 \sin(x) \mathrm{d}x$
3. $\int x e^x \mathrm{d}x$, $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$, $\int x^3 e^x \mathrm{d}x$
4. $\int x \ln x \mathrm{d}x$, $\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$, $\int x^3 \ln x \mathrm{d}x$

Spróbuj samodzielnie uogólnić powyższe obliczenia.

Zadanie 102 — Wyznacz, stosując metodę całkowania przez podstawienie, następujące całki nieoznaczone:

1. $\int \sin(3x + 1) \mathrm{d}x$, $\int \frac{x}{x+1} \mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{1 + x^2} \mathrm{d}x$ (podstaw $t = 1 + x^2$),
2. $\int \frac{1}{1+2x^2} \mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} \mathrm{d}x$,
3. $\int x e^{-x^2} \mathrm{d}x$

4. $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$ (podstaw $u = \ln x$, zastosuj dwukrotnie całkowanie przez części)
5. $\int \tan x \mathrm{d}x$

Zadanie 103 — Wyznacz pole następujących obszarów:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \wedge |y| \leq \sin x\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| < e^{-x}\}$.
4. Obszar ograniczony parabolą o równaniu $y = 2x^2 - 6x$ i osią OX

Zadanie 104 — Wyznacz pole elipsy zadanej równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Zadanie 105 — Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalna oraz, że g jest funkcją ciągłą. Niech

$$H(x) = \int_a^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t \ .$$

Wyznacz $H'(x)$.
Wskazówka: Niech $F(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$. Zauważ, że $H(x) = F(f(x))$.

Zadanie 106 — Oblicz następujące całki nieoznaczone z funkcji wymiernych:

1. $\int \frac{2x+1}{3x+2}\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{1}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x$. Wskazówka: Wyznacz takie liczby A, B i C, że $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.
6. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. Wskazówka: Zastosuj podstawienie $x = \tan(u)$.
7. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

Zadanie 107 — Rozważamy funkcję $f(x) = x^2$ na odcinku $[0, 1]$. Rozważamy sumę dolną

$$s_n(f, 0, 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf \left\{ f(x) : \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \right\} \frac{1}{n} \ .$$

1. Korzystając ze wzoru $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n_1)(2n + 1)$ wyznacz zwartą postać wzoru na $s_n(f, 0, 1)$
2. Oblicz $\lim_{n\to\infty} s_n(f, 0, 1)$
3. Oblicz $\int_0^1 x^2 dx$ za pomocą całki nieoznaczonej :–)

Zadanie 108 — Oblicz objętość torusa powstałego przez obrót koła $x^2 + (y - a)^2 \leq r^2$.

c.d.n.
Powodzenia,
Jacek Cichoń