ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

EGZAMIN

Z każdej grupy zadań rozwiazać wybrane przez siebie zadanie.

1 GRUPA ZADAŃ (liczby zespolone).

I.1. a) Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę $z = 1 + i$. b) Znajdując pierwiastek kwadratowy z liczby $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, znaleźć sinus i cosinus argumentu głównego tego pierwiastka. Jaki to kąt? c) Rozwiązać równanie kwadratowe: $z^2 + iz + 1 = 0$. d) Podać dowód równości $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

I.2. a) Obliczyć $|z|$, $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}(z))$, $\overline{z}$, z^{-1}, $\sqrt{z}$, gdzie $z = 1+\sqrt{3}$. b) Rozwiązać równanie kwadratowe: $iz^2 + z + 1 = 0$. c) Podać dowód równości $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

2 GRUPA ZADAŃ (wielomiany).

II.1. a) Wykonać dzielenie wielomianów: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 : iz^2 - (1+2i)z - 2$. b) Rozłożyć w domenie rzeczywistej na ułamki proste następujące funkcje wymierne:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^4-1},$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^3+2x^2+x}.$$

II.2. a) Wykonać dzielenie wielomianów: $iz^4 + z^3 + iz^2 + 1 : z^2 + 1$. b) Rozłożyć w domenie rzeczywistej na ułamki proste następujące funkcje wymierne:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3-1},$$

$$g(x) = \frac{x^2+2}{(x-2)^2(x+1)}.$$

3 GRUPA ZADAŃ (algebra macierzy).

III.1. a) Wykonać mnożenie macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+2i \\ 0 & 2 & i \\ -i & 3 & 2-i \\ 1 & 1-2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

b) Stosując dwie metody: Gaussa i wzór z macierzą transponowaną dopełnień algebraicznych, znaleźć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2i & i \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

III.2. a) Wykonać mnożenie macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 2+i & 3 \\ 1 & 1-2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1-i & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Stosując dwie metody: Gaussa i wzór z macierzą transponowaną dopełnień algebraicznych, znaleźć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} i & i & i \\ 0 & 2i & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4 GRUPA ZADAŃ (wyznaczniki).

IV.1. a) Stosując trzy techniki: Gaussa, wzór przekątniowy (czyli z definicji wyznacznika) oraz rozwinięcie Laplace'a, obliczyć (na trzy sposoby) wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & i & i+1 \\ 0 & 2i & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = .$$

b) Bez wykonywania (nadmiernych) obliczeń, zauważyć (z uzasadnieniem!) ile wyniesie wyznacznik iloczynu macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+2i \\ 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ -i & 3 & 2-i \end{bmatrix}.$$

IV.2. a) Stosując trzy techniki: Gaussa, wzór przekątniowy (czyli z definicji wyznacznika) oraz rozwinięcie Laplace'a, obliczyć (na trzy sposoby) wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 2i & i-1 \\ 2 & 1 & i \end{vmatrix} = .$$

b) Bez wykonywania (nadmiernych) obliczeń, zauważyć (z uzasadnieniem!) ile wyniesie wyznacznik iloczynu macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2022 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ -i & 3 & 2-i \end{bmatrix}.$$

5 GRUPA ZADAŃ (układy równań liniowych).

V.1. Rozwiązać dwiema metodami, metodą Gaussa i przy pomocy wzorów Cramera, nastepujący układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 - i \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= i \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 + 3i. \end{aligned}$$

V.2. Rozwiązać dwiema metodami, metodą Gaussa i przy pomocy wzorów Cramera, nastepujący układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

6 GRUPA ZADAŃ (geometria analityczna).

VI.1 a) Obliczyć cosinus kąta między odcinkami $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, gdzie $A = (1,1)$, $B = (1,2)$, $C = (4,0)$. b) Wyznaczyć równanie stycznej do okręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu 1 w punkcie przecięcia tego okregu z prostą $y = \sqrt{3}x$, dla $x < 0$. c) Wyznaczyć pole trójkąta ABC dla punktów A, B i C z części a) tego zadania.

VI.2 a) Obliczyć cosinus kąta między odcinkami $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, gdzie $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (5,0)$. b) Wyznaczyć równanie stycznej do okręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu 1 w punkcie przecięcia tego okregu z prostą $y = \sqrt{3}x$, dla $x > 0$. c) Wyznaczyć pole trójkąta ABC dla punktów A, B i C z części a) tego zadania.