ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

WYKŁAD 1

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

DZIAŁANIA ABSTRAKCYJNE

Niech A bedzie dowolnym zbiorem. Przez $|A|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru A, mówimy też, że $|A|$ jest *mocą zbioru* A. Jeśli A jest zbiorem nieskończonym, piszemy $|A| = \infty$ (uwaga: w matematyce rozróżnia się też moce zbiorów nieskończonych, przpisując im odpowiednie liczby nieskończone zwane *nieskończonymi liczbami kardynalnymi*; tu jednak te rozróżnienia nie będą dla nas istotne).

Zadanie 1. Niech A będzie pewnym zbiorem skończonym o mocy n. Niech $P(A)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A, tzn.

$$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

(np. dla $A = \{1, 2, 3\}$ mamy $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1.2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$). Jeśli $|A| = n$, ile wynosi $|P(A)|$?

Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. *Produktem katrezjańskim* $A \times B$ zbiorów A, B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich *par uporządkowanych* (a, b) gdzie a jest elementem zbioru A, $a \in A$, a b jest elementem zbioru B, $b \in B$. Symbolicznie

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

W parze uporządkowanej kolejność elementów: a a potem b, jest istotna, w przeciwieństwie do zbioru dwuelementowego. I tak, np. $\{2, 7\} = \{7, 2\}$ ale $(2, 7) \neq (7, 2)$. Piszemy też $A \times A = A^2$.

Możemy także rozważać trójki uporządkowane dowolnych elementów (a, b, c). Wszystkie trójki uporządkowane (a, b, c), gdzie a jest elementem pewnego zbioru A, gdzie b jest elementem pewnego zbioru B, a c jest elementem pewnego zbioru C, tworzą zbiór $A \times B \times C$. Gdy $A = B = C$ piszemy też A^3 zamiast $A \times A \times A$.

Zadanie 2. Niech zbiory A, B bedą skończone. Zapisać wzór na $|A \times B|$ przy pomocy $|A|$ i $|B|$. Jaki zatem będzie wzór na $|A^2|$?

Zadanie 3. Niech zbiory A, B, C bedą skończone. Zapisać wzór na $|A \times B \times C|$ przy pomocy $|A|$ i $|B|$ i $|C|$. Jaki zatem będzie wzór na $|A^3|$?

Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Niech $f : A \to B$ będzie odwzorowaniem z A w B. Zbiór A nazywamy *dziedziną* odwzorowania f. Zbiór wszystkich wartości odwzorowania A jest pewnym podzbiorem zbioru B. Oznaczamy ten zbiór symbolem $f[A]$. W symbolach:

$$f[A] = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

Zbiór $f[A]$ nazywamy *obrazem* odwzorowania f.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{N} \to: \mathbb{N}$ dane wzorem $f(n) = n + 1$. Czym jest zbiór $f[\mathbb{N}]$? To samo pytanie dla odwzorowania $f(n) = 2n$. To samo pytanie dla odwzorowania $f(n) = 2n - 1$.

vspace0.4 cm

Niech $f : A \to B$ bedzie odwzorowaniem ze zbioru A w zbiór B Niech $C \subseteq B$ bedzie podzbiorem B. *Przeciwobrazem* zbioru C przez odwzorowanie f, $f^{-1}[C]$, nazywamy zbiór wszystkich elementów a ze zbioru A, które przez f przechodzą na elementy ze zbioru C, tzn. takich $a \in A$, dla których $f(a) \in C$; symbolicznie:

$$f^{-1}[C] = \{a \in A : f(a) \in C\}.$$

Jeśli $f : A \to B$ oraz każdy element zbioru $f[A]$ jest obrazem tylko jednego elementu z A, to f maznewamy *injekcją*. Mówimy też, że f jest odwzorowaniem $1-1$ ("jeden-jeden") z A na $f[A]$, mówimy też, że f jest odzorowaniem *różnowartościowym*.

Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Niech $f : A \to B$ będzie odwzorowaniem z A w B, a $g : B \to C$ będzie odwzorowaniem z B w C. Odwzorowanie $h : A \to C$ dane wzorem $h(a) = g(f(a))$ nazywamy *złożeniem* odwzorowań f i g i oznaczamy

$$h = g \circ f.$$

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{N} \to: \mathbb{N}$ będzie dane wzorem $f(n) = n+1$, a $g : \mathbb{N} \to: \mathbb{N}$ będzie dane wzorem $g(n) = n^2$. Podać wzór definiujący odwzorowanie $g \circ f$. podać także wzór definiujący odwzorowanie $f \circ g$.

Zauważmy, że działanie dodawania, np. na liczbach rzeczywistych jest odwzorowaniem $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danym wzorem

$$+((a, b)) = a + b.$$

Podobnie rzecz się ma z mnożeniem.

Dla dowolnego zbioru A *działaniem* na zbiorze A nazywamy jakiekolwiek odwzorowanie $\star : A^2 \to A$. Piszemy, tak jak ma to miejsce w przypadku klasycznych działąń, $a \star b$ zamiast $\star((a, b))$. Zazwyczaj rozważane przez nas działania maja pewne specjalne własności.

Mówimy, że działanie $\star$ jest *łączne*, jeśli dla kazdych $a, b, c \in A$ zachodzi równość

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

Mówimy, że działanie $\star$ jest *przemienne*, jeśli dla każdych $a, b \in A$ zachodzi równość

$$a \star b = a \star b.$$

Mówimy, że element $e \in A$ jest *elementem neutralnym* dla działania $\star$, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzą równości

$$a \star e = e \star a = a.$$

Jesli e jest elementem neutralnym dla działania $\star$, mówimy, że $b \in A$ jest elementem odwrotnym do $a \in A$, jeśli

$$a \star b = b \star a = e.$$

Jeśli zbiór A z określonym na nim działaniem $\star$ nazywamy *półgrupą*, jeśli działanie $\star$ jest łączne. Jeśli dodatkowo istnieje element neutralny i każdy element ma element odwrotny, mówimy, że zbiór A z działaniem $\star$ jest *grupą*. Jeśli dodatkowo działanie $\star$ jest przemienne, mówimy, że A z działaniem $\star$ jest grupą *przemienną* lub *abelową*.

Zadanie 6. Uzasadnić , że liczby rzeczywiste z dodawaniem są grupą?

Zadanie 7. Czy liczby rzeczywiste z mnożeniem są grupą?

Zadanie 8. Czy dodatnie liczby rzeczywiste z mnożeniem są grupą?

Zadanie 9. Czy dodatnie liczby rzeczywiste z dzieleniem są grupą?

Zadanie 10. Czy liczby naturalne z dodawaniem są grupą?

Zadanie 11. Czy liczby całkowite $\mathbb{Z}$ z dodawaniem są grupą?

Zadanie 12. Zdefiniujmy następujące działnie na zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych:

$$a \star b = a + b + 2.$$

Czy zbiór $\mathbb{Z}$ z tym działaniem jest grupą?

Zadanie 13. Niech A bedzie dowolnym zbiorem. Na zbiorze A^A wszystkich odwzorowań z A w A rozważmy znane nam już działanie $g \circ f$ składania odzorowań. Pokazać, że A^A z tym działaniem jest półgrupą. Czy działanie to ma element neutralny?

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Niech $\Phi(n)$ bedzie pewnym zdaniem o liczbie naturalnej n. Przykładowo:

i) $\underbrace{(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1}_{\Phi(n)}$;

ii) $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}_{\Phi(n)}$;

iii) $\underbrace{(|A| = n) \Rightarrow (|P(n)| = 2^n)}_{\Phi(n)}$.

Metoda indukcji to metoda dowodzenia, że jakaś ustalona formuła $\Phi(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego n. Polega ona na udowodnieniu, że zachodzi $\Phi(1)$, a nastepnie, że **zachodzi implikacja**: jeśli $\Phi(n)$, to $\Phi(n+1)$.

Metodę dowodu przez indukcję dobrze ilustruje przykład ustawionych blisko siebie klocków domino:

||||||

Sprawdźmy, że zachodzi $\Phi(1)$. Zacznijmy od prawej strony dowodzonej równosci:

$$\frac{1-a^{1+1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a.$$

A więc, istotnie, $\Phi(1)$ zachodzi.

Załóżmy teraz, że zachodzi $\Phi(k)$, tzn.

$$1+a+\ldots+a^k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}.$$

Sprawdżmy czy wtedy zachodzi też $\Phi(k+1)$. Mamy, korzystając z założenia powyżej:

$$1+a+\ldots+a^k+a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}+a^{k+1}(1-a)}{1-a} =$$
$$\frac{1-a^{k+2}}{1-a} = \frac{1-a^{(k+1)+1}}{1-a}.$$

Równość pomiędzy skrajnymi wyrazami powyższego ciągu równości, czyli równość

$$1+a+\ldots+a^k+a^{k+1} = \frac{1-a^{(k+1)+1}}{1-a},$$

to właśnie $\Phi(k+1)$

Zatem z zasady indukcji wnosimy, że równość (3) zachodzi dla każdego naturalnego n.

Zadanie 14. Korzystając z zasady indukcji, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadanie 15. Korzystając z zasady indukcji, udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi wzór

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$$

(czy można ten wzór udowodnić jeszcze inaczej?).