ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

WYKŁAD 3

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

LICZBY ZESPOLONE - c.d

Jak wiemy, istnienie rozwiązania równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = 0$$

w liczbach rzeczywistych, dla $a, b, c \in \mathbb{R}$, zależy od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$. Jeśli ten znak jest ujemny, to równanie nie ma rozwiązań. Oczywiście najprostszy przykład takiego równania to

$$x^2 + 1 = 0.$$

Wiemy już, że w liczbach zespolonych ma ono dwa rozwiązania: i, $-i$. Żądanie, aby właśnie to równanie miało rozwiązanie, posłużyło nam do konsystentnego określenia liczb zespolonych i działań dodawania i mnożenia na tych liczbach. Teraz pokażemy, że każde równanie kwadratowe

$$az^2 + bz + c = 0, \tag{1}$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, ma rozwiazania w dziedzinie zespolonej. Tak jak w dziedzinie rzeczywistej, niech $\Delta = b^2 - 4ac$. Wybierzmy jedno u, które jest pierwiastkiem kwadratowym z Δ, tzn. taką liczbą zespoloną, że

$$u^2 = \Delta,$$

(zaraz pokażemy, że takie u istnieje) i oznaczmy tę liczbę przez $\sqrt{\Delta}$.

Zadanie 1. Pokazać, że liczby $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ są rozwiązaniami równania (1).

Pozostaje pokazać, że u takie, że $u^2 = \Delta$ rzeczywiście istnieje. Oznaczmy $u = x+yi$. Niech więc $\Delta = \alpha + \beta i$, gdzie α, β są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Załóżmy najpierw, że $\beta \neq 0$. Nasze równanie ma postać

$$(x + yi)^2 = \alpha + \beta i \tag{2}$$

czyli

$$x^2 - y^2 + 2xyi = \alpha + \beta i.$$

Stąd dostajemy

$$x^2 - y^2 = \alpha$$

i

$$2xy = \beta.$$

Załóżmy, że $x \neq 0$ (jeśli $x = 0$ i, jak założyliśmy, $\beta \neq 0$ to rozwiązań postaci yi oczywiscie nie ma). Z drugiego równania dostajemy

$$y = \frac{\beta}{2x} \tag{3}$$

i z pierwszego równania dostajemy

$$x^2 - \frac{\beta^2}{4x^2} = \alpha,$$

skąd

$$\frac{4x^4 - 4\alpha x^2 - \beta^2}{4x^2} = 0,$$

skąd

$$4x^4 - 4\alpha x^2 - \beta^2 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych z niewiadomą $v = x^2$. Rozwiązaniem dodatnim tego równania jest

$$v = \frac{4\alpha + \sqrt{16\alpha^2 + 16\beta^2}}{8} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

Stąd

$$x = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$$

lub

$$x = -\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Używając (3), możemy już obliczyć y. Mianowicie dla $x > 0$:

$$y = \frac{\beta}{2\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}};$$

i dla $x < 0$:

$$y = -\frac{\beta}{2\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}.$$

Założyliśmy na początku, że $\beta \neq 0$. Rozważmy teraz przypadek $\beta = 0$. Nasze równanie wygląda teraz następująco:

$$(x + iy)^2 = \alpha.$$

Oczywiście, gdy $\alpha \geqslant 0$, jego rozwiazaniem jest $y = 0$ i $x = \pm\sqrt{\alpha}$. Gdy $\alpha < 0$, rozwiazaniem jest $x = 0$ i $y = \pm\sqrt{|\alpha|}$.

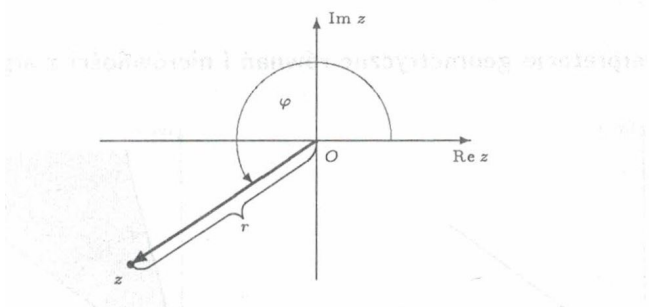
Zadanie 2. Pokazać przez bezpośredni rachunek, że tak znalezione x, y spełniają równanie (2).

Zadanie 3. Rozwiązać równania kwadratowe a) $z^2 - iz - 1 + i = 0$, b) $iz^2 - iz - 1 = 0$; c) $z^2 + (2 + i)z - 1 = 0$.

Liczba zespolona $z = (a, b) = a + bi$ może, jak wiemy, być interpretowana jako punkt na płaszczyźnie lub wektor o początku w punkcie $(0, 0) = 0$ i końcu w punkcie (a, b). Kąt, jaki tworzy ten wektor z osią rzeczywistą, nazywamy *argumentem* liczby z i

oznaczamy $arg(z)$. Oczywiście nie jest to oznaczenie jednoznaczne, bowiem miarą tego samego kąta jest suma każdej jego ustalonej miary α i dowolnej wielokrotności całkowitej liczby 2π, czyli $\alpha + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem faktycznie $arg(z)$ jest zbiorem liczb, a nie jedną liczbą. Jeśli natomiast umówimy się, że nasz kąt bedziemy mierzyli tylko w przedziale $[0, 2\pi)$, to wtedy uzyskujemy jednoznaczność. Ten szczególny przypadek argumentu z nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $Arg(z)$.

Poniżej interpretacja geometryczna postaci trygonometrycznej liczby zespolonej z, gdzie $Arg(z) = \phi$ i $r = |z|$:



Zadanie 4. Dla dwóch liczb zespolonych z, s pokazać, że $|zs| = |z||s|$.

Zadanie 5. Znaleźć argument główny nastepujących liczb zespolonych: i, $-i$, 1, -1, $1-i$, $1+i$, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Kluczowe dla kilku podstawowych faktów o liczbach zespolonych jest nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeśli mnożymy przez siebie dwie liczby zespolone, ich moduły się mnożą, a argumenty dodają, tzn.

(4) $zs = |z|(\cos(\phi)+i\sin(\phi))\cdot|s|(\cos(\psi)+i\sin(\psi)) = |z||s|(\cos(\phi+\psi)+i\sin(\phi+\psi))$,

gdzie ϕ jest argumentem z, a ψ jest argumentem s.

Dowód. Mamy

$$|z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \cdot |s|(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) =$$
$$|z||s|((\cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)) + (\cos(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) =$$
$$|z||s|(\cos(\phi + \psi) + i\sin(\phi + \psi)).$$

□

Zatem, z jednoznaczności reprezentacji trygonometrycznej, suma dowolnie wybranych argumentów liczb z i s jest (pewnym) argumentem liczby zs, a iloczyn modułów z i s jest modułem ich iloczynu zs.

Zadanie 6. Wybrać dwie dowolne liczby zespolone z i s o argumentach, odpowiednio, $\pi/3$ i $\pi/2$ o module 1. Obliczyć ich iloczyn i na podstawie przedstawienia tego iloczynu odczytać wartości cosinusa i sinusa kąta $5\pi/6$.

Zadanie 7. Wybrać dwie dowolne liczby zespolone z i s o argumentach, odpowiednio, $\pi/4$ i $\pi/3$ o module 1. Obliczyć ich iloczyn i na podstawie przedstawienia tego iloczynu odczytać wartości cosinusa i sinusa kąta $7\pi/12$.

Zadanie 8. Dla liczby z i s z poprzedniego zadania obliczyć iloraz z/s i odczytać wartości cosinusa i sinusa argumentu tego ilorazu. Obliczyć $Arg(z/s)$.

Zadanie 9. Określić w której ćwiartce będzie iloraz z/s, jeśli

$$z = 2022(\cos(\pi/2022) + i\sin(\pi/2022))$$

i

$$s = 2021(\cos(\pi/2021) + i\sin(\pi/2021)).$$

Zadanie 10. Znaleźć przedstawienie trygonometryczne liczby $z = \cos(0)+i\sin(\pi/2)$.

Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 1 jest tzw. wzór Moivre'a.

Twierdzenie 2 (wzór Moivre'a). Dla liczby zespolonej $z \neq 0$, której (dowolnym ustalonym) argumentem jest ϕ, zachodzi wzór

$$(|z|(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) \tag{5}$$

Dowód. Ponieważ iloczyn zawiera czynnik z n razy, więc, zgodnie ze wzorem z twierdzenia 1, argumentem iloczynu będzie liczba

$$\underbrace{\phi + \ldots + \phi}_{n \text{ razy}} = n\phi.$$

Modułem iloczynu będzie iloczyn modułów, a więc $|z|^n$ (zadanie 4).

□

Jak już wiemy, dowolna liczba zespolona różna od zera ma dwa pierwiastki kwadratowe (w sensie zespolonym oznacza to, że istnieją dwie liczby zespolone, które podniesione do kwadratu, dają tę liczbę; przypomnijmy, że dla liczb rzeczywistych, używamy nieco innej terminologii, mianowicie pierwiastkiem kwadratowym nazywamy wyłącznie liczbę nieujemną). Pokażemy teraz, że dla dowolnej liczby naturalnej n każda liczba zespolona z różna od zera ma n pierwiastków stopnia n, tzn. istnieje n liczb zespolonych $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ takich, że

$$s_i^n = z.$$

Przedstawmy z w postaci trygonometrycznej

$$z = |z|(cos\phi + i\sin\phi),$$

gdzie $\phi = Arg(z)$ jest argumentem głównym liczby z. Korzystając ze wzoru Moivre'a (5), od razu widzimy, że liczba

$$s_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n}\right)\right)$$

jest pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z (tzn. $s_0^n = z$).

Zauważmy dalej, że

$$z = |z|(\cos(\phi + 2\pi) + i\sin(\phi + 2\pi)),$$

a więc także

$$s_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2\pi}{n}\right)\right)$$

jest pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z (tzn. $s_1^n = z$).

Podobnie dla każdej liczby naturalnej $k < n$ (tu zastrzeżenie "mniejsza od n" nie jest potrzebne; używamy go dalej dla rozróżnienia pierwiastków)

$$z = |z|(\cos(\phi + 2k\pi) + i\sin(\phi + 2k\pi)),$$

a więc także

$$s_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

jest pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z (tzn. $s_k^n = z$). Zauważmy tu, że

$$0 \leqslant \frac{\phi}{n} < \frac{\phi + 2\pi}{n} < \frac{\phi + 2\cdot 2\pi}{n} < \frac{\phi + 3\cdot 2\pi}{n} < \ldots < \frac{\phi + (n-1)\cdot 2\pi}{n} < 2\pi.$$

Stąd, ponieważ liczby zespolone o różnych argumentach głównych są różne, wnioskujemy, że wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby z $s_0, \ldots, s_{n-1}$ są różne.

Zauważmy, że gdybyśmy naszą definicję przedłużyli powyżej $k = n - 1$, to $s_n = s_0$, $s_{n+1} = s_1, \ldots$.

Załóżmy teraz, że $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$. Zatem ϕ z powyższego rozumowania jest zerem. Stąd pierwiastkami n-tego stopnia z 1 sa następujące liczby zespolone:

$$\xi_0 = \sqrt[n]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{0}{n}\right)\right) = 1,$$

$$\xi_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$\xi_{n-1} = \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Zadanie 11. Znaleźć wszystkie pierwiastki stopni $3, 4, 6$ z jedynki.

Zadanie 12. Pokazać (przy powyższych oznaczeniach), że dla dowolnego $0 \leqslant k \leqslant n - 1$

$$\{s_k\xi_0, s_k\xi_1, \ldots, s_k\xi_{n-1}\} = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$$

(uwaga: kolejność elementów, tak jak są wymienione, może być inna w obu zbiorach).

Zadanie 13. Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 3 z liczb i oraz $-i$.

Zadanie 14. Znaleźć wszystkie pierwiastki stopnia 4 z liczby -1.