ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

WYKŁAD 5

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

FUNKCJE WYMIERNE; UŁAMKI PROSTE

Funkcją wymierną w dziedzinie zespolonej (i także rzeczywistej) nazywamy ułamek wielomianów zespolonych $Q(z) = \frac{w(z)}{v(z)}$ (odpowiednio, rzeczywistych $Q(x) = \frac{w(x)}{v(x)}$). Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów wiemy, że

$$w(z) = v(z)u(z) + r(z),$$

gdzie $r(z)$ jest wielomianem stopnia niższego niż stopień $v(z)$. Dzieląc obie strony powyższej równości przez $v(z)$, dostajemy

$$\frac{w(z)}{v(z)} = u(z) + \frac{r(z)}{v(z)}.$$

Zatem pełną informację o funkcji wymiernej ($\frac{w(z)}{v(z)}$) dostajemy ze znajomości wielomianu ($u(z)$) i funkcji wymiernej, dla której stopień licznika ($deg(r(z))$) jest mniejszy niż stopień mianownika ($deg(v(z))$). Funkcje wymierne o stopniu licznika mniejszym niż stopień mianownika można przedstwiąć w postaci sumy tzw. *ułamków prostych*. Ze względu na zastosowania w całkowaniu szczególnie ważna jest tu dziedzina rzeczywista. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8. Każdą funkcję wymierną w dziedzinie rzeczywistej

$$f(x) = \frac{w(x)}{v(x)},$$

gdzie $deg(v(x) < deg(w(x))$ i

$$v(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)^{m_1} \dots (\alpha_k x - \beta_k)^{m_k} (\gamma_1 x^2 + \delta_1 x + \xi_1)^{n_1} \dots (\gamma_l x^2 + \delta_l x + \xi_l)^{n_l}$$

(wiemy, że każdy wielomian $v(x)$ w dziedzinie rzeczywistej można tak rozłożyć) można przedstawić jako sumę ułamków prostych

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{A_1^{(1)}}{\alpha_1 x - \beta_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(\alpha_1 x - \beta_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(\alpha_1 x - \beta_1)^{m_1}} \\
+ \frac{A_1^{(2)}}{\alpha_2 x - \beta_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(\alpha_2 x - \beta_2)^2} + \dots + \frac{A_{m_2}^{(2)}}{(\alpha_2 x - \beta_2)^{m_2}} + \\
\vdots \\
+ \frac{A_1^{(k)}}{\alpha_k x - \beta_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(\alpha_k x - \beta_k)^2} + \dots + \frac{A_{m_k}^{(k)}}{(\alpha_k x - \beta_k)^{m_k}} + \\
+ \frac{B_1^{(1)} x + C_1^{(1)}}{\gamma_1 x^2 + \delta_1 x + \xi_1} + \frac{B_2^{(1)} x + C_2^{(1)}}{(\gamma_1 x^2 + \delta_1 x + \xi_1)^2} + \dots \frac{B_{n_1}^{(1)} x + C_{n_1}^{(1)}}{(\gamma_1 x^2 + \delta_1 x + \xi_1)^{n_1}} + \\
+ \frac{B_1^{(2)} x + C_1^{(2)}}{\gamma_2 x^2 + \delta_2 x + \xi_2} + \frac{B_2^{(2)} x + C_2^{(2)}}{(\gamma_2 x^2 + \delta_2 x + \xi_2)^2} + \dots \frac{B_{n_2}^{(2)} x + C_{n_2}^{(2)}}{(\gamma_2 x^2 + \delta_2 x + \xi_2)^{n_2}} +
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{B_1^{(l)}x+C_1^{(l)}}{\gamma_l x^2+\delta_l x+\xi_2}+\frac{B_2^{(l)}x+C_2^{(l)}}{(\gamma_l x^2+\delta_l x+\xi_l)^2}+\dots\frac{B_{n_l}^{(l)}x+C_{n_l}^{(l)}}{(\gamma_l x^2+\delta_l x+\xi_l)^{n_l}}.$$

Dowód tego twierdzenia pomijamy. Ważną umiejętnością jest stosowanie algorytmu prowadzącego do znajdowania powyższego rozkładu, o ile umiemy przedstawić mianownik $v(x)$ funkcji wymiernej w postaci iloczynu czynników liniowych i kwadratowych. Rozważmy następujący przykład.

Przykład. Przedstawimy w postaci sumy ułamków prostych funkcję wymierną $f(x)=\frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Zgodnie z powyższym twierdzeniem istnieje jednoznaczny rozkład na ułamki proste:

$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika prawej strony równości otrzymujemy:

$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Wykonując odpowiednie mnożenia i porządkując licznik ułamka z prawej strony równości, dostajemy po kolei:

$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A(x^3-x^2+x-1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=$$

$$\frac{A(x^3-x^2+x-1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}=$$

$$\frac{A(x^3-x^2+x-1)+B(x^2+1)+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D}{(x-1)^2(x^2+1)}=$$

$$\frac{(A+C)x^3+x^2(-A+B-2C+D)+(A+C-2D)x-A+B+D}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach x w licznikach ułamków ze skrajnych stron powyższego ciągu równości, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} A+C=0\\ -A+B-2C+D=1\\ A+C-2D=-2\\ -A+B+D=2.\end{cases}$$

Na podstawie pierwszego i trzeciego równania dostajemy

$$-2D=-2,$$

czyli

$$D=1.$$

Dodając pierwsze równanie do drugiego i podstawiając $D=1$, dostajemy:

$$B-C=0,$$

a więc

$$B=C.$$

Dodając pierwsze równanie do czwartego i zastepując C przez B, dostajemy

$$2B + D = 2,$$

a więc, ponieważ, jak już wiemy, $D = 1$, otrzymujemy

$$B = \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie rozwiazaniem naszego układu równań jest

$$A = -\frac{1}{2},\ B = C = \frac{1}{2}, D = 1.$$

Zatem rozkład funkcji wymiernej $f(x) = \frac{x^2-x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ na ułamki proste wygląda nastepujaco:

$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+1}.$$

Zadanie 1. Przez sprowadzenie prawej strony do wspólnego mianownika sprawdzić poprawność powyższego rozwiązania.

Zadanie 2. Przedstawić w postaci sumy ułamków prostych funkcję wymierną $g(x) = \frac{x^3-x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Zadanie 3. Przedstawić w postaci sumy ułamków prostych funkcję wymierną $h(x) = \frac{x^3-x+2}{x^4-1}$.

Zadanie 4. Przedstawić w postaci sumy ułamków prostych funkcję wymierną $k(x) = \frac{x^3-x+2}{x^4-1}$.

Odpowiednikiem twierdzenia 7 dla dziedziny zespolonej jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9. Każdą funkcję wymierną w dziedzinie zespolonej

$$f(z) = \frac{w(z)}{v(z)},$$

gdzie $deg(v(z) < deg(w(z))$ i

$$v(z) = (\alpha_1 z - \beta_1)^{m_1}(\alpha_2 z - \beta_2)^{m_2} \dots (\alpha_k z - \beta_k)^{m_k}$$

(wiemy, że każdy wielomian $v(z)$ w dziedzinie zespolonej można tak rozłożyć) można przedstawić jako sumę ułamków prostych

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{A_1^{(1)}}{\alpha_1 z - \beta_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(\alpha_1 z - \beta_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(\alpha_1 z - \beta_1)^{m_1}} \\ + \frac{A_1^{(2)}}{\alpha_2 z - \beta_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(\alpha_2 z - \beta_2)^2} + \dots + \frac{A_{m_2}^{(2)}}{(\alpha_2 z - \beta_2)^{m_2}} + \\ \vdots \\ + \frac{A_1^{(k)}}{\alpha_k z - \beta_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(\alpha_k z - \beta_k)^2} + \dots + \frac{A_{m_k}^{(k)}}{(\alpha_k z - \beta_k)^{m_k}}. \end{aligned}$$

(Tutaj oczywiście stałe $A_i^{(j)}$ mogą być zespolone.)

Zadanie 5. Funkcje wymierne $f(z), g(z), h(z), k(z)$ z przykładu i zadań 2-4 przedstawić jako sumy ułamków prostych w dziedzinie zespolonej.

Zadanie 6. Funkcję wymierną $l(z) = \frac{i}{iz^3-1}$ rozłożyc na sumę ułamków prostych w dziedzinie zespolonej.