ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

WYKŁAD 7

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

WYZNACZNIKI

Permutacją zbioru $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ nazywamy każdą funkcję różnowartościową z I_n na I_n. Zbiór wszystkich permutacji zbioru I_n oznaczamy przez S_n. Niech η będzie permutacją z S_n. Zwyczajowo permutację η zapisujemy w postaci

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \eta(1) & \eta(2) & \ldots & \eta(n) \end{pmatrix}$$

lub po prostu

$$\eta = (\eta(1), \eta(2), \ldots, \eta(n)).$$

Oczywiscie na permutację zbioru $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ możemy patrzeć jak na pewne przestawienie elementów ciagu $(1, 2, \ldots, n)$: na pierwszym miejscu ustawiamy $\eta(1)$, na drugim $\eta(2)$, itd, w końcu na n-tym $\eta(n)$.

Rozważmy następującą funkcję $\eta : I_3 \to I_3$: $\eta(1) = 1, \eta(2) = 3, \eta(3) = 2$. Oczywiście η jest permutacją i możemy ją zapisać jako

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

lub jako

$$\eta = (1, 3, 2).$$

Zadanie 1. Pokazać, że wszystkich permutacji zbioru I_n jest $n!$; innymi słowy, że $|S_n| = n!$.

Zadanie 2. Wypisać wszystkie permutacje zbioru I_4.

Nieporządkiem w permutacji $\eta \in S_n$ nazywamy każdą parę liczb $1 \leqslant i < j \leqslant n$ taką, że $\eta(i) > \eta(j)$. Jesli permutacja ma parzystą liczbę nieporządków, nazywamy ją *permutacją parzystą*, jeśli ma nieparzystą liczbę nieporządków - *permutacją nieparzystą*.

Znakiem permutacji ρ, $\mathrm{sgn}(\rho)$ jest liczba 1, jeśli ρ jest permutacją parzystą, lub liczba -1, jeśli ρ jest permutacją nieparzystą.

Zadanie 3. Wskazać, które permutacje z S_4 są parzyste, a które nieparzyste.

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli $n > 1$, to permutacji parzystych jest tyle samo co nieparzystych (tzn. $n!/2$) Wsk.: zauważyć, że zamiana dwóch pierwszych elementów ciągu $\eta = (\eta(1), \eta(2), \ldots, \eta(n))$ zmienia permutację parzystą na nieparzystą i na odwrót.

Transpozycją permutacji $\rho \in S_n$ nazywamy taką permutację $\bar{\rho}_{i,j}$ gdzie dla pewnej ustalonej pary liczb $1 \leqslant i < j \leqslant n$ $\rho^*(i) = \rho(j)$ i $\rho^*(j) = \rho(i)$, i dla wszystkich liczb k różnych od i, j $\rho^*(k) = \rho(k)$. Transpozycję identyczności, w więc permutację $\pi_{i,j}$ taką, że $\pi_{i,j}(i) = j$, $\pi_{i,j}(j) = i$, a poza tym $\pi_{i,j}(k) = k$ dla wszystkich liczb k różnych od i, j. nazywamy po prostu *transpozycją*.

Zadanie 5. Pokazać, że jeśli $\bar{\rho}_{i,j}$ jest transpozycją permutacji ρ, to $\bar{\rho}_{i,j}$ jest złożeniem permutacji ρ i pewnej transpozycji.

Twierdzenie 13. Każda transpozycja zmienia parzystość permutacji.

Dowód. Niech $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Oznaczmy przez P_i, N_i liczbę odpowiednio porzadków i nieporządków w permutacji ρ dla par i, s, gdzie $i < s < j$, a przez P_j, N_j liczbę odpowiednio porzadków i nieporządków dla par s, j, gdzie ponownie $i < s < j$. Oznaczmy przez $\bar{P}_i, \bar{N}_i$ liczbę odpowiednio porzadków i nieporządków w permutacji $\bar{\rho}_{i,j}$ dla par i, s, gdzie $i < s < j$, a przez $\bar{P}_j, \bar{N}_j$ liczbę odpowiednio porzadków i nieporządków dla par s, j, gdzie ponownie $i < s < j$. Zauważmy, że po zmianie ρ na $\bar{\rho}_{i,j}$ tylko porzadki i nieporządki miedzy elementami i, j oraz elementami $i < s < j$ mogą ulec zmianie. Mamy

$$P_i + N_i = P_j + N_j = j - i - 1$$

oraz

$$\begin{aligned} P_i &= \bar{N}_j, \\ N_i &= \bar{P}_j, \\ P_j &= \bar{N}_i, \\ N_j &= \bar{P}_i. \end{aligned}$$

Łączna liczba nieporządków dla par i, s, i dla par s, j, gdzie $i < \rho(s) < j$,dla permutacji ρ wynosi

$$N_i + N_j = 2(j - i - 1) - (P_i + P_j) = 2(j - i - 1) - (\bar{N}_j + \bar{N}_i),$$

a zatem parzystość sum tych nieporządków jest taka sama, bowiem łącznie dają liczbę parzystą:

$$(N_i + N_j) + (\bar{N}_j + \bar{N}_i) = 2(j - i - 1).$$

Dochodzi jednak lub ubywa nieporządek dla pary i, j, bowiem zamieniamy miejscami $\rho(i)$ i $\rho(j)$. Ostatecznie liczba wszystkich nieporządków zmienia parzystość po przejściu od permutacji ρ do permutacji $\bar{\rho}_{i,j}$.

□

Zadanie 6. Pokazać, że każda permutacja parzysta (nieparzysta) jest złożeniem parzystej (nieparzystej) liczby transpozycji. Wsk.: Zacząć od identyczności i przestawiać pary w permutacjach, aż dojdziemy do naszej rozważanej permutacji i skorzystać z zadania 5 (każde przestawienie pary elementów odpowiada złożeniu z transpozycją).

Zadanie 7. Pokazać, że permutacje parzyste zbioru $\{1, 2 \ldots, n\}$ tworzą grupę (a więc są podgrupą S_n). W szczególności permutacja odwrotna do danej ma ten sam znak.

Definicja wyznacznika opiera się istotnie na pojęciach permutacji i parzystosci permutacji. Rozważmy zaspoloną macierz kwadratową:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wyznacznikiem macierzy A, oznaczanym przez $\det(A)$ lub przez

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)}.$$

Przykład. Dla $n = 2$ mamy tylko dwie permutacje:

$$\mathrm{id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mamy $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_2) = 1$ (nie ma nieporządków) i $\operatorname{sgn}(\rho) = -1$ (jeden nieporządek). Zatem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Przykład. Dla $n = 3$ mamy sześć permutacji:

$$\mathrm{id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \rho_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mamy $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_3) = 1$ (nie ma nieporządków) i $\operatorname{sgn}(\rho_1) = 1$ (dwa nieporządki), $\operatorname{sgn}(\rho_2) = 1$ (dwa nieporządki), $\operatorname{sgn}(\rho_3) = -1$ (trzy nieporządki), $\operatorname{sgn}(\rho_4) = -1$ (jeden nieporządek), $\operatorname{sgn}(\rho_5) = -1$ (jeden nieporządek).

Mamy więc:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tak więc po rozszereniu macierzy o dwie pierwsze kolumny iloczyny elementów na niebieskich przekątnych sumujemy ze znakiem dodatnim, a elementów na czerwonych przekątnych ze znakiem ujemnym:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Zadanie 8. Pokazać, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Użyjemy teraz twierdzenie 13, aby wykazać, że zamiana wierszy w macierzy kwadratowej zmienia znak wyznacznika.

Twierdzenie 14. Jeśli w macierzy kwadratowej A zamienimy wiersz i-ty z j-tym, to wyznacznik tak otrzymanej macierzy A' bedzie równy:

$$\det(A') = -\det(A).$$

Dowód. Niech $A' = [a'_{rs}]_{1\leqslant r,s\leqslant n}$, gdzie $a'_{r,s} = a_{r,s}$, jesli $r \neq i, j$ oraz $a'_{is} = a_{js}$ i $a'_{js} = a_{is}$ (tzn. wiersz i-ty macierzy A' to wiersz j-ty macierzy A, a wiersz j-ty

macierzy A' to wiersz i-ty macierzy A; poza tym wszystkie wiersze w obu macierzach są takie same).

Niech np. $i < j$. Obliczamy z definicji wyznacznika:

$$\det(A') =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a'_{1\rho(1)} a'_{2\rho(2)} \dots a'_{i-1\rho(i-1)} a'_{i\rho(i)} a'_{i+1\rho(i+1)} \dots a'_{j-1\rho(j-1)} a'_{j\rho(j)} a'_{j+1\rho(j+1)} \dots a'_{n\rho(n)} =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{i-1\rho(i-1)} a_{j\rho(i)} a_{i+1\rho(i+1)} \dots a_{j-1\rho(j-1)} a_{i\rho(j)} a_{j+1\rho(j+1)} \dots a_{n\rho(n)} =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{i-1\rho(i-1)} a_{i\rho(j)} a_{i+1\rho(i+1)} \dots a_{j-1\rho(j-1)} a_{j\rho(i)} a_{j+1\rho(j+1)} \dots a_{n\rho(n)} =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} (-\operatorname{sgn}(\bar{\rho})) a_{1\bar{\rho}(1)} a_{2\bar{\rho}(2)} \dots a_{i-1\bar{\rho}(i-1)} a_{i\bar{\rho}(j)} a_{i+1\bar{\rho}(i+1)} \dots a_{j-1\bar{\rho}(j-1)} a_{j\bar{\rho}(i)} a_{j+1\bar{\rho}(j+1)} \dots a_{n\bar{\rho}(n)} =$$

($\bar{\rho} = \bar{\rho}_{i,j}$ jest transpozycją permutacji ρ ze względu na miejsca i i j; zauważamy tu także, że odwzorowanie $\rho \mapsto \bar{\rho}_{i,j}$ odwzorowuje w sposób $1-1$ zbiór wszystkich permutacji S_n na S_n)

$$\sum_{\bar{\rho} \in S_n} (-\operatorname{sgn}(\bar{\rho})) a_{1\bar{\rho}(1)} a_{2\bar{\rho}(2)} \dots a_{i-1\bar{\rho}(i-1)} a_{i\bar{\rho}(j)} a_{i+1\bar{\rho}(i+1)} \dots a_{j-1\bar{\rho}(j-1)} a_{j\bar{\rho}(i)} a_{j+1\bar{\rho}(j+1)} \dots a_{n\bar{\rho}(n)} =$$

$$-\sum_{\bar{\rho} \in S_n} \operatorname{sgn}(\bar{\rho}) a_{1\bar{\rho}(1)} a_{2\bar{\rho}(2)} \dots a_{i-1\bar{\rho}(i-1)} a_{i\bar{\rho}(j)} a_{i+1\bar{\rho}(i+1)} \dots a_{j-1\bar{\rho}(j-1)} a_{j\bar{\rho}(i)} a_{j+1\bar{\rho}(j+1)} \dots a_{n\bar{\rho}(n)} =$$

$$= -\det(A).$$

□

Wnioskiem z twierdzenia 14 jest nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 15. Jeśli w macierzy kwadratowej A dwa wiersze sa identyczne, to wyznacznik tej macierzy jest równy zeru.

Zadanie 9. Udowodnić twierdzenie 15.

Twierdzenie 16. Niech macierze kwadratowe $A = [a_{k,l}], A' = [a'_{k,l}] \in M_{n\times n}$ różnią się tylko jednym, powiedzmy i-tym wierszem. Inaczej mówiąc: $a'_{k,l} = a_{k,l}$ dla $k \neq i$. Niech $C = [c_{k,l}]$ będzie macierzą, której w wiersz i-ty jest sumą wierszy i-tych macierzy A i A', a pozostałe wiersze są identyczne z wierszami macierzy A (i A'). Inczej mówiąc: $c_{i,l} = a_{i,l} + a'_{i,j}$ oraz $c_{k,l} = a_{k,l} = a'_{k,l} = a_{k,l}$ dla $k \neq i$. Wtedy

$$\det(C) = \det(A) + \det(A').$$

Dowód. Obliczamy:

$$\det(C) =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) c_{1\rho(1)} c_{2\rho(2)} \dots c_{i-1\rho(i-1)} c_{i\rho(i)} c_{i+1\rho(i+1)} \dots c_{n\rho(n)} =$$

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{i-1\rho(i-1)} (a_{i\rho(i)} + a'_{i\rho(i)}) a_{i+1\rho(i+1)} \dots a_{n\rho(n)} =$$

$$\sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{i-1\rho(i-1)} a_{i\rho(i)} a_{i+1\rho(i+1)} \dots a_{n\rho(n)} +$$
$$\sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{i-1\rho(i-1)} a'_{i\rho(i)} a_{i+1\rho(i+1)} \dots a_{n\rho(n)} =$$
$$\det(A) + \det(A').$$

□

Twierdzenie 17. Jeśli w macierzy $A \in M_{n\times n}$ pomnożymy jeden wiersz przez stałą α, to wyznacznik tak utworzonej npowej macierzy A' jest równy wyznacznkowi macierzy A pomnożonemu przez α:

$$\det(A') = \alpha \det(A).$$

Zadanie 10. Udowodnić powyższe twierdzenie.

Operacją elementarną na macierzy nazywamy zastąpienie wiersza, powiedzmy j-tego, wierszem powstałym przez pomnożenie przaz stałą innego wiersza, powiedzmy i-tego, i dodanie do zastępowanego wiersza (j-tego). Innymi słowy operacją elementarną na macierzy $[a_{k,l}]_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ nazywamy utworzenie nowej macierzy $[a'_{k,l}]_{1\leqslant k,l\leqslant n}$, gdzie $a'_{k,l} = a_{k,l}$ dla $k \neq j$ oraz $a'_{j,l} = a_{j,l} + a_{i,l}$, gdzie $i \neq j$ są ustalonymi numerami wierszy.

W dowodzie kolejnego twierdzenia (19) będziemy korzystać z nastepującego faktu.

Zadanie 11. Niech $A = [a_{i,j}] \in M_{n\times n}$, $B = [b_{i,j}] \in M_{n\times n}$ $\mathbf{0}_n \in M_{n\times n}$ bedzie macierzą złożoną z samych zer. Niec $D \in M_{2n\times 2n}$ bedzie zdefiniopwana jako (zapis blokowy)

$$D = \begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0}_n & B \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że $\det(D) = \det(A)\det(B)$.

Twierdzenie 18. Operacja elementarna nie zmienia wartości wyznacznika macierzy.

Dowód. Niech $A = [a_{k,l}]$, $A' = [a'_{k,l}]$, gdzie $a'_{k,l} = a_{k,l}$ dla $k \neq j$, $a'_{j,l} = \alpha a_{i,l}$. Zatem macierz A' powstaje z macierzy A przez zastapienie wiersza j-tego i-tym pomnożonym przez stałą α. Zatem na postawie twierdzeń 15 i 17: $\det(A') = 0$. Macierze A i A' różnią sie tylko wierszem j-tym, a więc, korzystając z twierdzenia 16, dostajemy dla macierzy $C = [c_{k,l}]$, zdefiniowanej jako $c_{k,l} = a_{k,l}$ dla $k \neq j$ i $c_{j,l} = a_{j,l} + a'_{j,l}$:

$$\det(C) = \det(A) + \det(A') = \det(A) + 0 = \det(A).$$

□

Jednym z podstawowych i najważniejszych twierdzeń algebry wyznaczników jest twierdzenie Cauchy'ego o multyplikatywności wyznacznika.

Twierdzenie 19 (Cauchy). Niech $A, B \in M_{n\times n}$. Wtedy

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ i $B = [b_{ij}]]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Przeprowadzimy dowód dla $n = 3$, jednak idea dowodu ma charakter ogólny i przepisanie dowodu dla dowolnego n jest tylko kwestią zmiany indeksów. Rozważmy macierz $D \in M_{2n\times 2n}$:

$$D = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Przy pomocy operacji elementarnych trzema pierwszymi wierszami "wykasujemy" wyrazy postaci a_{ij}. Mianowicie: pierwszy wiersz pomnożymy przez a_{11} i dodamy do czwartego, pierwszy wiersz pomnożymy przez a_{21} i dodamy do piątego, pierwszy wiersz pomnożymy przez a_{31} i dodamy do szóstego, drugi wiersz pomnożymy przez a_{12} i dodamy do czwartego, drugi wiersz pomnożymy przez a_{22} i dodamy do piatego, drugi wiersz pomnożymy przez a_{32} i dodamy do szóstego, trzeci wiersz pomnożymy przez a_{13} i dodamy do czwartego, trzeci wiersz pomnożymy przez a_{23} i dodamy do piątego, trzeci wiersz pomnożymy przez a_{33} i dodamy do szóstego. Nasza macierz będzie wtedy miała postać:

$$D' =$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -1 \\ a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zamieniając miejscami wiersze pierwszy z czwartym, drugi z piątym i trzeci z szóstym, otrzymujemy macierz

$$D'' =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

i

$$\det(D') = -\det(D''),$$

ponieważ trzy razy zamienialiśmy wiersze miejscami. Zauważmy, że górny lewy róg 3×3 zajęty jest przez podmacierz będącą iloczynem macierzy A i B. Macierz D'', zapisana blokowo, ma postać

$$D'' = \begin{bmatrix} AB & \mathbf{0}_3 \\ B & -I_3 \end{bmatrix}.$$

Z zadania 11 dostajemy:

$$\det(D) = \det(B)\det(A).$$

Analogicznie do zadania 11 (lub wręcz korzystając z zdania 11; jak?) dostajemy też

$$\det(D'') = \det(AB)\det(-I_3) = -\det(AB),$$

a ponieważ $\det(D'') = -\det(D)$, ostatecznie dostajemy

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

□

Jeden ze sposobów obliczania wyznacznika, czasami też bardzo poręczny numerycznie, dany jest przez tzw. rozwinięcie Laplace'a. Najpierw jednak kilka definicji. Niech dana bedzie macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_{n\times n}$ Jej *minorem stopnia* k (lub też *minorem* jej wyznacznika), $k \leqslant n$, nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej $k \times k$ utworzonej z A przez skreslenie $n-k$ wierszy i $n-k$ kolumn lub, inaczej mówiąc pozostawienie elementów należących wyłącznie do jednego z pewnych k wierszy i jednocześnie do jednej z pewnych k kolumn w macierzy A. Przykładowo rozważmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Skreślamy w tej macierzy druga kolumnę i trzecią kolumnę i drugi i piąty wiersz. Uzyskujemy w ten sposób macierz

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}.$$

Wyznacznik tej mecierzy, $\det(B)$, jest minorem stopnia 3.

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{kl} macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę $M_{kl} = (-1)^{k+l}\det(A_{kl})$ gdzie A_{kl} jest macierzą powstałą z A przez skreslenie k-tego wiersza i l-tej kolumny. Przykładowo, dopełnieniem algebraicznym elementu a_{12} w macierzy A będzie liczba

$$M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Przy pomocy pojęcia minora lub dopełnienia algebraicznego, można podać następującą metodę oblicznia wyznacznika, która ma charakter rekurencyjny - jesli umiemy obliczać wyznaczniki macierzy kwadratowych stopni mniejszych niż n, przy ich

pomocy możemy obliczyć wyznacznik macierzy stopnia n. Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 20. Dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ i dowolnego ustalonego m, $1 \leqslant m \leqslant n$, zachodzi następujący wzór:

$$\det(A) = a_{m,1}M_{m,1} + a_{m,2}M_{m,2} + \ldots + a_{m,n}M_{m,n}.$$

Podany wzór nosi nazwę *rozwinięcia Laplace's wyznacznika* $\det(A)$ *względem* k*-tego wiersza macierzy* A.

Dowód. Przyjmijmy najpierw $k = 1$ (tzn. rozważmy pierwszy wiersz). Przypomnijmy, że wyznacznik $\det(A)$ zdefiniowany jest następującym wzorem

$$\det(A) = \sum_{\rho \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \ldots a_{n\rho(n)}.$$

Jeśli $\rho(1) = k$ to pozostałe czynniki iloczynnu mają postać $a_{2\rho(2)} \ldots a_{n\rho(n)}$, gdzie $\rho(j) \neq k$ dla wszystkich $j > 1$. Rozważmy permutację $\bar{\rho} \in S_{n-1}$:

$$\bar{\rho}(i) = \begin{cases} \rho(i+1) & \text{jeśli } \rho(i+1) < k \\ \rho(i+1) - 1 & \text{jeśli } \rho(i+1) > k. \end{cases}$$

Zauważmy, że w permutacji $\bar{\rho}$ jest tyle samo nieporządków co w permutacji ρ między elementami $\rho(2), \rho(3), \ldots, \rho(n)$. Zatem liczba nieporządków permutacji ρ, to liczba nieporządków permutacji $\bar{\rho}$ plus liczba nieporządków w permutacji ρ między elementem $\rho(1) = k$, a pozostałymi elementami $\rho(j)$. Tych ostatnich jest jednak dokładnie $k - 1$ (taki nieporządek pojawia się zawsze, gdy $\rho(j) < k$ dla $j > 1$ i tylko wtedy). Zauważmy też, że, rozważając wszystkie permutacje $\rho \in S_n$ takie, że $\rho(1) = k$, przy pomocy powyższego wzoru otrzymamy wszystkie permutacje $\bar{\rho}$ z S_{n-1} i że nasze odwzorowanie jest $\rho \mapsto \bar{\rho}$ jest $1 - 1$. Zatem, oznaczając, jak wyżej, przez A_{1k} macierz powstałą z A przez skreślenie pierwszego wiersza i k-tej kolumny, a także wprowadzając oznaczenie $a'_{ij} = a_{(i+1)j}$ dostajemy, sumując wyłącznie po tych permutacjach $\rho \in S_n$, dla których $\rho(1) = k$:

$$\sum_{\rho \in S_n, \rho(1)=k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} a_{1k} a_{2\rho(2)} \ldots a_{n\rho(n)} =$$

$$a_{1k} \sum_{\bar{\rho} \in S_{n-1}} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} (-1)^{k-1} a_{2,\bar{\rho}(1)}, a_{3,\bar{\rho}(2)}, \ldots, a_{n,\bar{\rho}(n-1)} =$$

$$a_{1k} \sum_{\bar{\rho} \in S_{n-1}} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} (-1)^{k-1} a'_{1,\bar{\rho}(1)}, a'_{2,\bar{\rho}(2)}, \ldots, a'_{(n-1),\bar{\rho}(n-1)} =$$

$$a_{1k}(-1)^{k-1} \sum_{\bar{\rho} \in S_{n-1}} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} a'_{1,\bar{\rho}(1)}, a'_{2,\bar{\rho}(2)}, \ldots, a'_{(n-1),\bar{\rho}(n-1)} =$$

$$a_{1k}(-1)^{k+1} \det(A_{1k}) = a_{1k} M_{1k}.$$

Stąd, sumując teraz po wsztkich możliwych k (jako wartościach $\rho(1)$) dostajemy

$$\det(A) = \sum_{\rho \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \ldots a_{n\rho(n)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho \in S_n, \rho(1)=k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\rho)} a_{1k} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} M_{1k}.$$

Dowodzi to naszej tezy dla rozwinięcia względem pierwszego wiersza.

Zadanie 12. Dokończyć dowód, pokazując, że wzór z tezy jest prawdziwy dla dowolnego m. Wskazówka: Przesunąć w macierzy A m-ty wiersz na pozycję pierwszą (uwaga! to nie to samo, co zamienić miejscami wiersz pierwszy i m-ty). Tak otrzymaną macierz nazwijmy A'. Zauważyć, że $A'_{1k} = A_{m,k}$.

Zadanie 13. Z zadania 8 wywnioskować, że wyznacznik, w taki sam sposób jak dla wierszy, można obliczać przez rozwinięcia względem kolumn.