ALGEBRA 2

WYKŁAD 4

(wykład połączony z ćwiczeniami)

2021/22

REPREZENTACJA MACIERZOWA PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWEGO

Niech $\langle \boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_n} \rangle$ bedzie bazą przestrzeni V, a $\langle \boldsymbol{r_1}, \ldots, \boldsymbol{r_m} \rangle$ bedzie bazą przestrzeni W. Niech $f : V \to W$ bedzie odwzorowaniem liniowym. Niech

$$f(\boldsymbol{p_1}) = a_{1,1}\boldsymbol{r_1} + a_{2,1}\boldsymbol{r_2} + \ldots + a_{m,1}\boldsymbol{r_m},$$

$$\vdots$$

$$f(\boldsymbol{p_i}) = a_{1,i}\boldsymbol{r_1} + a_{2,i}\boldsymbol{r_2} + \ldots + a_{m,i}\boldsymbol{r_m},$$

$$\vdots$$

$$f(\boldsymbol{p_n}) = a_{1,n}\boldsymbol{r_1} + a_{2,n}\boldsymbol{r_2} + \ldots + a_{m,n}\boldsymbol{r_m}.$$

Niech $\boldsymbol{v} \in V$ i reprezentacja ewktora $\boldsymbol{v}$ w bazie $\langle \boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_n} \rangle$ ma postać

$$\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{p_1} + \beta_2\boldsymbol{p_2} + \ldots \beta_i\boldsymbol{p_i} + \ldots \beta_n\boldsymbol{p_n} =$$

Mamy z powyższych równości i z liniowosci f:

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\beta_1\boldsymbol{p_1} + \beta_2\boldsymbol{p_2} + \ldots \beta_i\boldsymbol{p_i} + \ldots \beta_n\boldsymbol{p_n}) =$$

$$\beta_1 f(\boldsymbol{p_1}) + \beta_2 f(\boldsymbol{p_2}) + \ldots \beta_i f(\boldsymbol{p_i}) + \ldots \beta_n f(\boldsymbol{p_n}) =$$

$$\beta_1 a_{1,1}\boldsymbol{r_1} + \beta_1 a_{2,1}\boldsymbol{r_2} + \ldots + \beta_1 a_{m,1}\boldsymbol{r_m} +$$

$$\beta_2 a_{1,2}\boldsymbol{r_1} + \beta_2 a_{2,2}\boldsymbol{r_2} + \ldots + \beta_2 a_{m,2}\boldsymbol{r_m} +$$

$$\vdots$$

$$\beta_i a_{1,i}\boldsymbol{r_1} + \beta_i a_{2,i}\boldsymbol{r_2} + \ldots + \beta_i a_{m,i}\boldsymbol{r_m} +$$

$$\vdots$$

$$\beta_n a_{1,n}\boldsymbol{r_1} + \beta_n a_{2,n}\boldsymbol{r_2} + \ldots + \beta_n a_{m,n}\boldsymbol{r_m} =$$

$$= (\beta_1 a_{1,1} + \beta_2 a_{1,2} + \ldots \beta_i a_{1,i} + \ldots + \beta_n a_{1,n})\boldsymbol{r_1} +$$

$$(\beta_1 a_{2,1} + \beta_2 a_{2,2} + \ldots \beta_i a_{2,i} + \ldots + \beta_n a_{2,n})\boldsymbol{r_2} +$$

$$\vdots$$

$$(\beta_1 a_{m,1} + \beta_2 a_{m,2} + \ldots \beta_i a_{m,i} + \ldots + \beta_n a_{m,n})\boldsymbol{r_m} =$$

(przechodzimy do przedstawienia wektora $f(\boldsymbol{v})$ w postaci kolumnowej w bazie $\langle \boldsymbol{r_1}, \ldots, \boldsymbol{r_m} \rangle$)

$$= \begin{bmatrix} \beta_1 a_{1,1} + \beta_2 a_{1,2} + \ldots \beta_i a_{1,i} + \ldots + \beta_n a_{1,n} \\ \beta_1 a_{2,1} + \beta_2 a_{2,2} + \ldots \beta_i a_{2,i} + \ldots + \beta_n a_{2,n} \\ \vdots \\ \beta_1 a_{m,1} + \beta_2 a_{m,2} + \ldots \beta_i a_{m,i} + \ldots + \beta_n a_{m,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,i}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,i}, \ldots, a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,i}, \ldots, a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Oznaczając

$$M_f = \begin{bmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,i}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,i}, \ldots, a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,i}, \ldots, a_{m,n} \end{bmatrix},$$

otrzymujemy następujący wzór na reprezentowanie $f(\boldsymbol{v})$ w bazie $\langle \boldsymbol{r_1}, \ldots, \boldsymbol{r_m} \rangle$

$$[f(\boldsymbol{v})]_R = M_f[\boldsymbol{v}]_P.$$

Macierz M_f nazywamy macierzową reprezentacja przekształcenia f (w zadanych bazach P i R). Zauważmy, że jej poszczególne kolumny są kolumnowymi reprezentacjami obrazów wektorów bazy P zapisanymi w bazie R.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zapisać macierz M_f (w bazach standardowych) a nastepnie przy jej pomocy obliczyć $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Zadanie 2. Macierz przekształcenia liniowego $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ w bazach odpowiednio dla dziedziny i obrazu

$$P = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle, \quad R = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1+i \end{bmatrix} \right\rangle$$

ma postać

$$M = \begin{bmatrix} 2+i, 0 \\ 1+i, 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć macierz f w bazach standardowych

$$B = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad B = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Zadanie 3. Macierz przekształcenia liniowego $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ w bazach standardowych

$$B = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad B = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

ma postać

$$M = \begin{bmatrix} 2i, -1 \\ 0, 3 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć macierz f w bazach

$$P = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle, \quad R = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1+i \end{bmatrix} \right\rangle$$

Zadanie 4. Pokazać, że jeśli U, V, W są przestrzeniami liniowymi oraz $f : U \to V$ i $g : V \to W$ sa przekształceniami liniowymi, to złożenie przekształceń f i g $g \circ f : U \to W$ jest przekszktałceniem liniowym (przypomnijmy: $g \circ f(\boldsymbol{v}) := g(f(\boldsymbol{v})))$.

Twierdzenie 7. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem skalarów i $f : V \to W$ i $g : V \to W$ przekształceniami liniowymi. Niech B_V, B_W będą ustalonymi bazami odpowiednio przestrzeni V i W. Niech M_f będzie reprezentacją macierzową ptrzekształcenia f, a M_g reprezentacją macierzową ptrzekształcenia g. Niech α i β będą skalarami. Wtedy macierz $\alpha M_f + \beta M_g$ jest reprezentacją macierzową ptrzekształcenia $\alpha f + \beta g$. (dodawanie przekształceń liniowych i mnożenie ich przez skalar było zdefiniowane).

Zadanie 5. Udowodnić twierdzenie 1.

Twierdzenie 8. Jeśli B_U, B_V, B_W sa ustalonymi bazami odpowiednio przestrzeni liniowych U, V, W i $f : U \to V$ i $g : V \to W$ sa przekształceniami liniowymi, oraz $M_{U,V}$ jest reprezentacją macierzową ptrzekształcenia f dla baz B_U i B_V i oraz $M_{V,W}$ jest reprezentacją macierzową ptrzekształcenia g dla baz B_V i B_W, to iloczyn macierzy $M_{U,W} = M_{V,W} M_{U,V}$ jest jest reprezentacją macierzową przekształcenia $g \circ f$ czyli złożenia ptrzekształceń f i g dla baz B_U i B_W.

Dowód. Niech $\boldsymbol{u} \in U$. Mamy z łączności mnożenia macierzy:

$$M_{U,W}[\boldsymbol{u}]_{B_U} = [g \circ f(\boldsymbol{u})]_{B_W} = [g(f(\boldsymbol{u}))]_{B_W} = M_{V,W}[f(\boldsymbol{u})]_{B_V} =$$
$$M_{V,W}(M_{U,V}[\boldsymbol{u}]_{B_U}) = (M_{V,W} M_{U,V})[\boldsymbol{u}]_{B_U}.$$

Tak wiec dla każdego wektora $\boldsymbol{u} \in U$ otrzymaliśmy równość

$$M_{U,W}[\boldsymbol{u}]_{B_U} = (M_{V,W} M_{U,V})[\boldsymbol{u}]_{B_U},$$

skąd już wynika, że

$$M_{U,W} = M_{V,W} M_{U,V}.$$

□

Zadanie 6. Uzasadnić ostatnie zdanie dowodu powyżej.

Twierdzenie 9. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru $\dim(V) = n < \infty$, $\dim(W) = m < \infty$. Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech F bedzie macierzą przekształcenia F w bazie P dla V i bazie R dla W. Niech P' bedzie inną bazą V, a R' bedzie inną bazą W. Niech $M_{P \to P'}$ bedzie macierza zmiany bazy z P do P', a $M_{R \to R'}$ bedzie macierza zmiany bazy z R' do R Wtedy macierzą przekształcenia f w bazie P' dla V bazie R' dla W jest macierz $M_{R \to R'} F M_{B' \to B}$.

Dowód. Niech $\boldsymbol{v} \in V$. Mamy

$$[f(\boldsymbol{v})]_{R'} = M_{R\to R'}[f(\boldsymbol{v})]_R = M_{R\to R'}(F[\boldsymbol{v}]_B) =$$
$$M_{R\to R'}(F(M_{B'\to B}[\boldsymbol{v}]_{B'})) = M_{R\to R'}FM_{B'\to B}[\boldsymbol{v}]_{B'}.$$

□

Wnioskiem z twierdzenia 9 jest nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 10. Niech V bedzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru $\dim(V) = n < \infty$. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Niech F bedzie macierzą przekształcenia F w bazie B (dla dziedziny i obrazu). Niech B' bedzie inną bazą V. Niech $M_{B'\to B}$ będzie macierzą zmiany bazy z B' do B. Wtedy macierzą przekształcenia f w bazie B' (dla dziedziny i obrazu) jest macierz $M^{-1}_{B'\to B}FM_{B'\to B}$.

Zadanie 7. Korzystając ze wzoru na $M_{B\to B'}$ przy zadanej macierzy $M_{B'\to B}$ i twierdzenia 9, udowodnić twierdzenie 10.

Zadanie 8. Niech $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ i niech

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz przekształcenia f w bazach

$$P = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

dla dziedziny i

$$R = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$$

dla obrazu.

Przypomnijmy, że *rzędem* macierzy $A = [a_{i.j}]$ nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wierszy (równoważnie: kolumn) tej macierzy. Rząd macierzy A oznaczać będziemy przez $\mathrm{Rank}(A)$. Zachodzi następujące twierdzenie podające charakteryzację pojęcia rzędu macierzy:

Twierdzenie 11. Rzędem macierzy $A = [a_{i.j}]$ jest maksymalny stopień jej minora o nieznikającym wyznaczniku.

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia 11, znaleźć rzędy nastepujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix}1,2,3,4\\0,1,2,3\\1,1,1,1,\end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix}0,0,0,\ 1\\0,1,2,-1\\1,1,1,\ 1\end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,0,0,1,1 \\ 0,1,0,0,0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 12. Jeśli V, W są przestrzeniami liniowymi, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $f : V \to W$ jest przekształceniem liniowym i F jest macierzową reprezentacją przekształcenia f w pewnych ustalonych bazach $B_V = \langle \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} \rangle$ dla V i $B_W = \langle \boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_m} \rangle$ dla W, to

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Rank}(F).$$

Dowód. Niech kolumny macierzy F o numerach $j_1 \leqslant \ldots \rfloor_k$ macierzy F, będą liniowo niezależne i k bedzie największą taka liczbą, dla której taki ciąg wierszy istnieje. Wektory z przestrzeni W tworzące te kolumny są liniowo niezależne w W. Ponieważ wszystkie wektory będące kolumnami w W rozpinają $\mathrm{Im}(f)$ (bo są wszystkimi obrazami wektorów bazy B), więc maksymalny układ liniowo niezależny wśród tych kolumn tworzy bazę $\mathrm{Im}(f)$.

$\square$

Zadanie 10. Jeśli V, W są przestrzeniami liniowymi, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, gdzie $n \leqslant m$,$f : V \to W$ jest przekształceniem liniowym i F jest macierzową reprezentacją przekształcenia f, okazać, że jeśli $\mathrm{Rank}(F) = n$, to odwzorowanie f jest różnowatościowe, tzn. $\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{v_2} \Rightarrow f(\boldsymbol{v_1}) \neq f(\boldsymbol{v_2})$.

Zadanie 11. Jeśli V jest przestrzenią liniową o skończonym wymiarze, $f : V \to V$ jest przekształceniem liniowym i F jest macierzową reprezentacją przekształcenia f oraz $\det(F) \neq 0$, wtedy odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne, tzn. jest różnowartościowe (jak w zadaniu 10) oraz $\mathrm{Im}(f) = V$ (wsk. skorzystać z twierdzenia 11).