**CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW**

**WYKŁAD 2**

2020/21

## WARUNKOWA WARTOŚĆ OCZEKIWANA; DEFINICJA

Przypomnijmy twierdzenie Radona-Nikodyma.

**Twierdzenie Radona-Nikodyma.** Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią miarową, z miara $\mu$ $\sigma$-skończoną. Niech $\nu$ będzie $\sigma$-skończoną miarą abosulnie ciągłą względem $\mu$ ($\nu << \mu$), tzn. taką, która jest równa zeru na wszystkich tych zbiorach, na których $\mu$ jest równa zeru. Wtedy istnieje funkcja $\mathcal{F}$-mierzalna $f : X \to [0, \infty)$, taka, że

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$. Funkcja $f$ wyznaczona jest jednoznacznie z dokładnością do zbiorów miary $\mu$ zero.

Funkcję $f$ oznaczamy $f := \frac{d\nu}{d\mu}$ i nazywamy *pochodną Radona-Nikodyma* miary $\nu$ względem miary $\mu$.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathcal{G}$ będzie $\sigma$-algebrą zawartą w $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Niech $X$ będzie nieujemną zmienną losową. Niech teraz

$$\nu(A) := \int_A X \, dP,$$

dla $A \in \mathcal{G}$. Tak zdefiniowana miara $\nu$ jest absolutnie ciągła względem prawdopodobieństwa. Z twierdzenia Radona-Nikodyma, zastosowanego do przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, istnieje $\mathcal{G}$-mierzalna zmienna losowa $Y \geqslant 0$, taka, że

$$\nu(A) = \int_A Y \, dP$$

dla każdego $A \in \mathcal{G}$. Funkcję $Y$ oznaczamy przez $E(X|\mathcal{G})$ i nazywamy *warunkową wartością oczekiwaną* zmiennej losowej $X$ względem $\sigma$-algebry $\mathcal{G}$. Podsumowując, $E(X|\mathcal{G})$ jest regularyzacją zmiennej losowej $X$, o ile interesują nas jedynie całki po zbiorach z $\mathcal{G}$, inaczej mówiąc $E(X|\mathcal{G})$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna oraz

$$\int_A X \, dP = \int_A Y \, dP$$

dla każdego $A \in \mathcal{G}$.

**Przykład 1.** Rzucamy dwa razy monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$ to

$$\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}.$$

$\sigma$-algebra, która zawiera wszystkie informacje o możliwych wynikach to

$$\mathcal{F} = \mathbf{P}(\Omega),$$

tzn. $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru $\Omega$. Na przykład zawiera zdarzenie

$$S = [\text{w obu rzutach otrzymaliśmy ten sam wynik}] = \{(O,O),(R,R)\}.$$

Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie $\sigma$-algebrą opisującą tylko pierwszy rzut. Mamy

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{(O,O),(O,R)\}, \{(R,O),(R,R)\}, \Omega\}.$$

Niech $X$ będzie zmienną losową opisującą całkowitą wygraną w grze, w której wygrywamy 1 za orła and 0 za reszkę, tzn.

$$X((O,O)) = 2, \quad X((O,R)) = 1, \quad X((R,O)) = 1, \quad X((R,R)) = 0.$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(X|\mathcal{G})$ musi być stała na atomach algebry $\mathcal{G}$ tj. na zdarzeniach $\{(O,O),(O,R)\}$, i $\{(R,O),(R,R)\}$ i spełniać równości:

$$\int_{\{(O,O),(O,R)\}} E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_{\{(O,O),(O,R)\}} X\,dP = \frac{3}{4}$$

i

$$\int_{\{(R,O),(R,R)\}} E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_{\{(R,O),(R,R)\}} X\,dP = \frac{1}{4}.$$

Stąd

$$E(X|\mathcal{G})((O,O)) = E(X|\mathcal{G})((O,R)) = \frac{3}{2}$$

oraz

$$E(X|\mathcal{G})((R,O)) = E(X|\mathcal{G})((R,R)) = \frac{1}{2}.$$

Nasz następny przykład zbudowany jest już na przestrzeni nieprzeliczalnej.

**Przykład 2.** Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$ ($\mathcal{B}[0,1]$- $\sigma$-algebra zbiorów borelowskich na odcinku $[0,1]$), i niech prawdopodobieństwem w tym modelu będzie miara Lebesgue'a $\lambda$ na odcinku $[0,1]$. Niech

$$\mathcal{G} = \sigma\left\{\left[0,\frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2},1\right]\right\}.$$

Niech $X(t) = t^2$. Odcinki $[0,1/4)$, $[1/4,1/2)$ and $[1/2,1]$ są atomami $\sigma$-algebry $\mathcal{G}$, skąd warunkowa wartość oczekiwana $E(X|\mathcal{G})$ musi być stała na tych odcinkach. Muszą także zachodzić równości:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} E(X|\mathcal{G})(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{4}} t^2\,dt = \frac{1}{192},$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} E(X|\mathcal{G})(t)\,dt = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^2\,dt = \frac{7}{192},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} E(X|\mathcal{G})(t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^2\,dt = \frac{7}{24}.$$

Niech $E(X|\mathcal{G})|_{[0,1/4)} \equiv a$. Z pierwszej równości dostajemy

$$\int_0^{1/4} a\,dt = a \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{192},$$

skąd $a = \frac{1}{48}$. Poprzez podobne obliczenia dostajemy

$$E(X|\mathcal{G}) = \begin{cases} \frac{1}{48}, & \omega \in [0, \frac{1}{4}), \\ \frac{7}{48}, & \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\ \frac{7}{12}, & \omega \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zdefiniujmy teraz warunkową wartość oczekiwaną w p;rzypadku ogólnym: $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Przypomnijmy: $X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}$, $X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$. Łatwo sprawdzić, że $X = X^+ - X^-$. Także $X^+, X^- \geqslant 0$. Naturalną więc definicją (podobnie jak dla zwykłej wartosci oczekiwanej, czyli po prostu całki) jest dla $\sigma$-algebry $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$:

$$E(X|\mathcal{G}) := E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G}).$$