CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW

WYKŁAD 3

2020/21

WARUNKOWA WARTOŚĆ OCZEKIWANA - WŁASNOŚCI

W całym tym rozdziale zakładamy, że dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a wszystkie zmienne losowe są $\mathcal{F}$-mierzalne.

Zauważmy, że wartość oczekiwana jest funkcjonałem (przyporządkowuje zmiennej losowej liczbę), natomiast warunkowa wartość oczekiwana jest operatorem (przyporządkowuje zmiennej losowej zmienną losową). Tak więć, pewne własności warunkowych wartości oczekiwanych, będące analogonami własności wartości oczekiwanej, a właściwie ich uogólnieniami, często wymagają dowodów bardziej złożonych niż ma to miejsce w przypadku wartości oczekiwanej. O takich podstawowych własnościach warunkowych wartości oczekiwanych orzeka poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Niech $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ będą σ-algebrami podzbiorów Ω zawartymi w $\mathcal{F}$. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi. Wtedy zachodzą (p.w.) poniższe równości:

i) $E(X+Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})$;
ii) $E(\alpha X|\mathcal{G}) = \alpha E(X|\mathcal{G})$ for $\alpha \in \mathbb{R}$;
iii) $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$.

Aby uidowodnić i) załóżmy najpierw, że $X, Y \geqslant 0$. Let $A \in \mathcal{G}$. Mamy

$$\int_A (X+Y)\, dP = \int_A X\, dP + \int_A Y\, dP =$$

$$\int_A E(X|\mathcal{G})\, dP + \int_A E(Y|\mathcal{G})\, dP = \int_A (E(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G}))\, dP.$$

Z jedyności warunkowych wartości oczekiwanych (z dokładnością do zbiorów miary zero) dostajemy już i) dla $X, Y \geqslant 0$.

Przejdźmy teraz do ogólnego przypadku $X, Y \in L_1$. Udowodnimy najpierw następujący claim.

Claim. Jeśli $X \geqslant Y \geqslant 0$ są zmiennymi losowymi, to

$$E(X-Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) - E(Y|\mathcal{G}).$$

Dowód claimu. Wiemy już, że i) zachodzi dla nieujemnych zmiennych losowych. Zatem

$$E(X-Y|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}),$$

a stąd już wynika teza claimu. $\Diamond$

Mamy

$$E(X+Y|\mathcal{G}) = E((X+Y)^+|\mathcal{G}) - E((X+Y)^-|\mathcal{G}).$$

Z zachodzenia tezy twierdzenia dla nieujemnych zmiennych losowych oraz z claimu mamy:

$$E((X+Y)^+|\mathcal{G}) =$$
$$E\Big(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y\geqslant 0]}(X+Y)+$$
$$\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[X\geqslant|Y|]}(X-|Y|)+\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[Y>|X|]}(Y-|X|)|\mathcal{G}\Big) =$$
$$E(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y\geqslant 0]}X|\mathcal{G})+E(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y\geqslant 0]}Y|\mathcal{G})+$$
$$E(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[X\geqslant|Y|]}X|\mathcal{G})-E(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[X\geqslant|Y|]}|Y||\mathcal{G})+$$
$$E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[Y>|X|]}Y|\mathcal{G})-E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[Y>|X|]}|X||\mathcal{G}).$$

Podobnie,

$$E\Big((X+Y)^-|\mathcal{G}) =$$
$$E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y<0]}(|X|+|Y|)+$$
$$\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[|X|\geqslant Y]}(|X|-Y)+\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[|Y|>X]}(|Y|-X)|\mathcal{G}\Big) =$$
$$E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y<0]}|X||\mathcal{G})+E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y<0]}|Y||\mathcal{G})+$$
$$E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[|X|\geqslant Y]}|X||\mathcal{G})-E(\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[|X|\geqslant Y]}Y|\mathcal{G})+$$
$$E(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[|Y|>X]}|Y||\mathcal{G})-E(\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[|Y|>X]}X|\mathcal{G}).$$

Tak więc, używając ponownie tezy, która została już udowodniona dla nieujemnych zmiennych losowych, dostajemy

$$E((X+Y)^+|\mathcal{G})-E((X+Y)^-|\mathcal{G}) =$$
$$E((\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y\geqslant 0]}+\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[X\geqslant|Y|]}+\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[|Y|>X]})X|\mathcal{G})+$$
$$E((\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y\geqslant 0]}+\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[Y>|X|]}+\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[|X|\geqslant Y]})Y|\mathcal{G})-$$
$$E((\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[Y>|X|]}+\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y<0]}+\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y\geqslant 0]\cap[|X|\geqslant Y]})|X||\mathcal{G})-$$
$$E((\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[X\geqslant|Y|]}+\mathbf{1}_{[X<0]\cap[Y<0]}+\mathbf{1}_{[X\geqslant 0]\cap[Y<0]\cap[|Y|>X]})|Y||\mathcal{G}) =$$
$$E(X^+|\mathcal{G})+E(Y^+|\mathcal{G})-E(X^-|\mathcal{G})-E(Y^-|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G})+E(Y|\mathcal{G}).$$

Tak więc część i) twierdzenia jest udowodniona.

Dla dowodu ii) załóżmy najpierw, że $X\geqslant 0$ oraz $\alpha\geqslant 0$. Niech $A\in\mathcal{G}$. Mamy

$$\int_A \alpha X\,dP = \alpha\int_A X\,dP = \alpha\int_A E(X|\mathcal{G}) = \int_A \alpha E(X|\mathcal{G})\,dP,$$

a więc w tym przypadku ii) zachodzi.

Załóżmy teraz, że $X\in L_1$ i $\alpha>0$. Na podstawie tego, co udowodniliśmy wyżej, mamy

$$E(\alpha X|\mathcal{G}) = E((\alpha X)^+|\mathcal{G})-E((\alpha X)^-|\mathcal{G}) = E(\alpha X^+|\mathcal{G})-E(\alpha X^-|\mathcal{G})$$
$$= \alpha E(X^+|\mathcal{G})-\alpha E(X^-|\mathcal{G}) = \alpha E(X|\mathcal{G}).$$

Załóżmy teraz, że $\alpha<0$. Na podstawie zachodzenia tezy w rozważonym wyżej przypadku mamy:

$$E(\alpha X|\mathcal{G}) = E(|\alpha|(-X)\mathcal{G}) = |\alpha|E(-X|\mathcal{G}) =$$
$$|\alpha|(E(X^-|\mathcal{G})-E(X^+|\mathcal{G})) = |\alpha|(-E(X|\mathcal{G}) = \alpha E(X|\mathcal{G}).$$

Tak więc część ii) twierdzenia jest udowodniona.

Aby udowodnić iii) załóżmy najpierw, że $X \geqslant 0$. Niech $A \in \mathcal{H}$. Ponieważ $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, mamy

$$\int_A X\,dP = \int_A E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_A E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})\,dP.$$

To dowodzi tezy punktu iii) dla nieujemnych zmiennych losowych.

Załózmy teraz, że $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Mamy

$$E(X|\mathcal{H}) = E(X^+|\mathcal{H}) - E(X^-|\mathcal{H}) =$$

$$E(E(X^+|\mathcal{G})|\mathcal{H}) - E(E(X^-|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})$$

gdzie ostatnia równość is otrzymana jest na podstawie już udowodnionej w i) i ii) liniowości warunkowej wartości oczekiwanej (zauważmy, że nie wynika ona wprost z definicji $E(X|\mathcal{H})$, ponieważ zmienna losowa $E(X^+|\mathcal{G})$ nie jest, w ogólności, równa $E(X|\mathcal{G})^+$, i nie zachodzi także analogiczna równość dla dla $E(X^-|\mathcal{G})$ - ćw.).

□

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżnosci monotonicznej posiada swoje uogólnienie dla warunkowych wartości oczekiwanych.

Twierdzenie 2. Niech $(Z_n)_n$ będzie niemalejącycm ciagiem nieujemnych zmiennych losowych oraz $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$, and $Z \in L_1$.
Wtedy

$$\lim_{n\to n} E(Z_n|\mathcal{G}) = E(Z|\mathcal{G}).$$

Dowód. Musimy sprawdzić, czy dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ zachodzi równość

$$\int_A Z dP = \int_A \lim_{n\to\infty} E(Z_n|\mathcal{G})\,dP.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej

$$\int_A \lim_{n\to\infty} E(Z_n|\mathcal{G})\,dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E(Z_n|\mathcal{G})\,dP =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A Z_n\,dP = \int_A \lim_{n\to\infty} Z_n\,dP = \int_A Z dP.$$

To kończy dowód.

□

Następujące twierdzenie orzeka o kolejnej bardzo ważnej własności warunkowej wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 3 Niech $X, Y, XY \in L_1$. Wtedy $E(YX|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$ p.w., jeśli Y jest $\mathcal{G}$-mierzalną zmienną losową.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $X, Y \geqslant 0$ oraz $Y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ i $a_i \neq a_j$ for $i \neq j$. Wtedy $A_i = Y^{-1}[\{a_i\}] \in \mathcal{G}$. Niech $A \in \mathcal{G}$. Mamy

$$\int_A YX\,dP = \int_A \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}\right) X\,dP = \sum_{i=1}^n a_i \int_A \mathbf{1}_{A_i} X\,dP =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int_{A\cap A_i} X\,dP = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{A\cap A_i} E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_A \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}\right) E(X|\mathcal{G})\,dP =$$

$$= \int_A YE(X|\mathcal{G})\,dP,$$

co pokazuje że $E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$ p.w. dla Y jak wyżej.

Aby pokazać zachodzenie tezy dla dowolnych nieujemnych zmiennych losowych X i Y zastosujemy twierdzenie 3.

Niech

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbf{1}_{[\frac{i-1}{2^n} \leqslant Y < \frac{i-1}{2^n}]}.$$

Ponieważ zmienne losowe mają postać, którą zakładaliśmy wyżej, mamy $E(Y_n X|\mathcal{G}) = Y_n E(X|\mathcal{G})$. Z twierdzenia 3 dostajemy

$$E(YX|\mathcal{G}) = E(\lim_{n\to\infty} Y_n X|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n X|\mathcal{G}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_n E(X|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}).$$

Teraz rozważmy przypadek ogólny dowolnych zmiennych losowych X, Y spełniających założenia twierdzenia. Mamy

$$E(XY|\mathcal{G}) = E((Y^+ - Y^-)(X^+ - X^-)|\mathcal{G}) =$$

$$E(Y^+X^+|\mathcal{G}) - E(Y^-X^+|\mathcal{G}) - E(Y^+X^-|\mathcal{G}) + E(Y^-X^-|\mathcal{G}) =$$

$$Y^+E(X^+|\mathcal{G}) - Y^-E(X^+|\mathcal{G}) - Y^+E(X^-|\mathcal{G}) + Y^-E(X^-|\mathcal{G}) =$$

$$Y^+(E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G})) - (E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G})) =$$

$$Y^+E(X|\mathcal{G}) - Y^-E(X|\mathcal{G}) = (Y^+ - Y^-)E(X|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}).$$

□

Twierdzenie 4 Jeśli zmienna losowa $X \in L_1$ i σ-algebra $\mathcal{G}$ są niezależne (tzn. dla kazdego zbioru $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $A \in \mathcal{G}$ zdarzenia $X^{-1}[B]$ i A są niezależne), to $E(X|\mathcal{G}) = EX$ p.w.

Dowód. Najpierw pokażemy, że dla każdego A niezależnego od wszystkich zdarzeń z $\mathcal{G}$ $E(\mathbf{1}_A|\mathcal{G}) = P(A)$ p.w.

Mamy dla $C \in \mathcal{G}$

$$\int_C \mathbf{1}_A dP = E\mathbf{1}_C\mathbf{1}_A = E\mathbf{1}_A E\mathbf{1}_C = P(A)P(C) = \int_C P(A)dP.$$

Jeśli X jest dyskretną zmienną losową $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ i $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$ (wtedy $A_i = X^{-1}[\{a_i\}]$), mamy p.w.

$$E(X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) = EX.$$

Załóżmy teraz X jest nieujemną zmienną losową niezależną od $\mathcal{G}$. Niech $(X_n)_n$ będzie niemalejącym ciągiem dyskretnych zmiennych losowych punktowo zbieżnym

do X. Z twierdzenia 2 oraz klasycznego twierdzenia Lebesgue's o zbieżności monotonicznej dostajemy

$$E(X|\mathcal{G}) = E(\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) =$$
$$\lim_{n\to\infty} EX_n = E \lim_{n\to\infty} X_n = EX.$$

Aby zakończyć dowód rozważmy przypadek ogólny dowolnej zmiennej losowej $X \in L_1$ niezależnej od $\mathcal{G}$. Mamy

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G}) = EX^+ - EX^- = EX.$$

□

Twierdzenie 5 (Nierówność Jensena dla warunkowych wartości oczekiwanych). Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Niech X będzie zmienną losową. Załóżmy, że $X \in L_1$ and $\varphi(X) \in L_1$. Wtedy zachodzi następująca nierówność:

$$E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geqslant \varphi(E(X|\mathcal{G})) \text{ a.e.} \tag{1}$$