CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW

WYKŁAD 4

2020/21

MARTYNGAŁY Z CZASEM DYSKRETNYM, DEFINICJE, PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$. Niech I będzie przedziałem w $\mathbb{Z}^*$. *Filtracją* nazywamy rodzinę σ-algebr $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$, gdzie $i \in I$, taką, że $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$, for $i < j$, $i, j \in I$.

Niech $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ będzie ustaloną filtracją. *Martyngałem adaptowanym do filtracji* $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ nazywamy ciąg zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$, taki, że X_i jest mierzalna względem σ-algebry $\mathcal{F}_i$, $X_i \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, and $E(X_j|\mathcal{F}_i) = X_i$, o ile $i < j$, dla wszystkich $i, j \in I$.

Jeśli w powyższej definicji mamy zamiast równości nierówność $E(X_j|\mathcal{F}_i) \geqslant X_i$ dla $i < j$, dla wszystkich $i, j \in I$, wtedy ciąg zmiennych losowych $(X_i)_{i\in I}$ nazywamy *submartyngałem*, a jeśli nierówość $E(X_j|\mathcal{F}_i) \leqslant X_i$ dla $i < j$, wtedy ciag $(X_i)_{i\in I}$ nazywamy *supermartyngałem*.

Łatwo zauważyć, że ciąg $(X_i)_{i\in I}$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie submartyngałem i supermartyngałem.

W terminach gier hazardowych martyngały odpowiadają grom uczciwym. Nastepujący przykład jest podstawową ilustracją tego pojęcia.

Rozpatruje my grę w orła i reszkę. Zakładamy, że rzucamy symetryczną monetą N razy. Gdy wypadnie orzeł, wygrywamy złotówkę, gdy wypadnie reszka, przegrywamy złotówkę. Skonstruujmy odpowiedni model probabilistyczny dla tej gry. Niech $\Omega = \{O, R\}^N = \{(i_1, \ldots, i_n) : i_j = O \text{ lub } R\}$. σ-algebra $\mathcal{F}_t$ która opisuje naszą wiedzę o przebiegu gry do czasu $t \in I$ włącznie, musi zawierać jako elementy wszystkie zdarzenia jakie mogły zajść do tego czasu. Let $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ and $\mathcal{F}_t = \sigma(\{A_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \{H, T\}^t\}$, where, for $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_t)$, $A_{\mathbf{s}} = \{(s_1, \ldots, s_t, i_{t+1}, \ldots, i_N\} : i_{t+1}, \ldots, i_N = H \text{ or } T\}$. Because at time $t = 1$ the information given is only about the first result, and $\mathcal{F}_1$ consists only of the following sets $\emptyset$, Ω, $A_{(H)} = \{(H, i_2, \ldots, i_N) : i_2, \ldots, i_N = H \text{ or } T\}$ and $A_{(T)} = \{(T, i_2, \ldots, i_N) : i_2, \ldots, i_N = H \text{ or } T\}$.

Niech X_t będzie naszą całkowitą wygraną w czasie t, tzn. po t rzutach (oczywiście, jeśli do tego czasu wypadnie więcej reszek niż orłów będzie to liczba ujemna). Zdarzenie $[X_n = k]$ jest sumą zbiorów $A_{\mathbf{s}}$, gdzie $\mathbf{s} \in \{O, R\}^t$ i $|\{i \leqslant t : s_i = H\}| - |\{i \leqslant t : s_i = H\}| = k$, które są oczywiście elementami $\mathcal{F}_t$. Zbiory $A_{\mathbf{s}}$, $s \in \{O, R\}^t$ są atomami $\mathcal{F}_t$, tzn. nie są juz sumami istotnie mniejszych elementów z $\mathcal{F}_t$. Stąd każda$\mathcal{F}_t$-mierzalna zmienna losowa jest stała na takim zbiorze. Tak wiec, aby pokazać

$$E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = X_t$$

wystarczy pokazać, że

$$\int_{A_{\mathbf{s}}} X_{t+1} dP = \int_{A_{\mathbf{s}}} X_t dP$$

dla każdego $\mathbf{s} \in \{O, R\}^t$. Mamy

$$\int_{A_{\mathbf{s}}} X_{t+1} dP = \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(H)} \cup A_{\mathbf{s}\wedge(R)}} X_{t+1} dP$$

$$= \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(O)}} X_{t+1} dP + \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(R)}} X_{t+1} dP$$

$$= \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(O)}} X_t + 1 \; dP + \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(R)}} X_t - 1 \; dP$$

$$= \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(O)}} X_t \; dP + P(A_{\mathbf{s}\wedge(O)}) + \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(T)}} X_t \; dP - P(A_{\mathbf{s}\wedge(O)})$$

$$= \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(O)}} X_t dP + \int_{A_{\mathbf{s}\wedge(R)}} X_t dP = \int_{A_{\mathbf{s}}} X_t dP.$$

Powyższy przykład można uogólnić w następujący sposób.

Niech $Y_1, Y_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i niech $EY_i = 0$ dla wszystkich $i \in \mathbf{N}$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Niech $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Pokażemy, że $(X_n)_n$ jest martyngałem wzgledem filtracji $(\mathcal{F}_n)_n$. Musimy sprawdzić, czy $X_n = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, co jest równoważne zachodzeniu równości

$$\int_A X_{n+1} dP = \int_A X_n dP$$

dla każdego $A \in \mathcal{F}_n$. Mamy

$$\int_A X_{n+1} dP = \int_A X_n + Y_{n+1} dP = \int_A X_n dP + \int_A Y_{n+1} dP =$$

$$= \int_A X_n dP + E\mathbf{1}_A Y_{n+1} = \int_A X_n dP + E\mathbf{1}_A EY_{n+1} = \int_A X_n dP,$$

gdzie ostatnie cztery równości wynikają z niezależności Y_{n+1} i $\mathcal{F}_n$, a ostatnia z $EY_{n+1} = 0$.

Zauważmy, że jeśli w powyższym przykładzie założymy, że $EY_i \geqslant 0$ ($EY_i \leqslant 0$) dla wszystkich $i \in \mathbf{N}$, to proces $(X_n)_n$, $n \in \mathbf{N}$ jest a submartyngałem (supermartyngałem).

Zaczniemy omawiać własności martyngałów od nastepujących lematów.

Lemat 1 Jeśli $I \subseteq \mathbb{Z}^*$ i $(X_i)_{i\in I}$ jest submartyngałem, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą funkcją wypukłą i $\phi(X_i)) \in L_1$ dla każdego $i \in I$, to $(\phi(X_i))_{i\in I}$ też jest submartyngałem.

Dowód. Dla $I \ni n > m \in I$ mamy na podstawie nierówności Jensena:

$$E(\phi(X_n)|\mathcal{F}_m) \geqslant \phi(E((X_n)|\mathcal{F}_m)) \geqslant \phi(X_m).$$

□

Lemat 2 Niech $I \subseteq \mathbb{Z}^*$ i $\sup I \in I$. Let $(X_i)_{i\in I}$ będzie submartyngałem ze względu na filtrację $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$. Wtedy rodzina zmiennych losowych $\{X_i^+ : i \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Dowód. Niech $M = \sup I$. Wtedy, korzystając z faktu, że funkcja $t \mapsto t^+ = \max(t, 0)$ jest wypukła i niemalejaca, na podstawie lematu 1 dla $i \in I$ i dodatniego N:

$$NP[X_i^+ > N] \leqslant \int_{[X_i^+ > N]} X_i^+ \, dP \leqslant \int_{[X_i^+ > N]} X_M^+ \, dP \leqslant EX_M^+.$$

Porównując skrajne wyrażenia po lewej i po prawej stronie dostajemy

$$P[X_i^+ > N] \leqslant \frac{EX_M^+}{N},$$

co daje

$$\lim_{N \to \infty} \sup\{P[X_i^+ > N] : i \in I\} = 0.$$

Porównujac z kolei wewnętrzne wyrażenia w ciągu nierówności wyżej, dostajemy

$$\lim_{N \to \infty} \int_{[X_i^+ > N]} X_i^+ \, dP = 0.$$

□

Nastepny lemat jest niemal natychmiastowym wnioskiem z lematów 1 i 2.

Lemat 3 Niech $I \subseteq \mathbb{Z}^*$ i $\sup I \in I$. Niech $(X_i)_{i \in I}$ będzie martyngałem wzgledem filtracji $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$. Wtedy rodzina zmiennych losowych $\{X_i : i \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Z lematu 1 zastosowanego do martyngałów $(X_i)_{i \in I}$ and $(-X_i)_{i \in I}$ wnioskujemy, że $(X_i^+)_{i \in I}$ and $(X_i^-)_{i \in I}$ są submartyngałami, skąd z lematu 2 są jednostajnie całkowalne, a więc rodzina $\{X_i : i \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

□

Niech I bedzie, jak wyżej, dyskretnym odcinkiem (jego elementy interpretujemy jako kolejne czasy). Niech $(\mathcal{F}_t)_t$, $t \in I$ będzie filtracją indeksowaną czasami z I. *Czasem zatrzymania* ze wzgledu na filtrację $(\mathcal{F}_t)_t$ nazywamy zmienną losową $T : \Omega \to I$ taką, że $[T \leqslant i] \in \mathcal{F}_i$. Intuicyjnie, każda σ-algebra $\mathcal{F}_t$ dostarcza nam pełnej informacji jaką mamy o "świecie" w czasie t (zazwyczaj powiązanej z rozwojem pewnego procesu) i decyzja o zatrzymaniu procesu, np. pewnej gry w czasie $T = t$ oparta jest wyłącznie na naszej wiedzy, co zaszło do tego czasu bez znajomości przyszłych wydarzeń.

Niech T będzie czasem zatrzymania ze wzgledu na filtrację $(\mathcal{F}_t)_t$. Wiążemy z T σ-algebrę zdarzeń $\mathcal{F}_T$ zdefiniowaną w następujący sposób: zdarzenie A należy do $\mathcal{F}_T$, jeśli $A \cap [T \leqslant t] \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in I$.

Udowodnimy teraz nastepujacy lemat techniczny.

Lemat Niech $\{X_n : 1 \leqslant n \leqslant N\}$ będzie submartyngałem ze wzgledu na filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t=1}^N$ i niech $S \leqslant T$ będzą czasami zatrzymania dla tej samej filtracji. Wtedy

$$\int_{A \cap [S=n]} X_S \, dP \leqslant \int_{A \cap [S=n]} X_T \, dP$$

dla kazdego $n \in \mathbf{N}$ oraz $A \in \mathcal{F}_S$.

. Dowód. Mamy

$$\int_{A\cap[s=n]} X_S\,dP = \int_{A\cap[S=n]} X_n\,dP = \int_{A\cap[S=n]\cap[T=n]} X_n\,dP + \int_{A\cap[S=n]\cap[T\geqslant n+1]} X_n\,dP \leqslant$$

$$\int_{A\cap[S=n]\cap[T=n]} X_n\,dP + \int_{A\cap[S=n]\cap[T\geqslant n+1]} X_{n+1}\,dP =$$

$$\int_{A\cap[S=n]\cap[T=n]} X_n\,dP + \int_{A\cap[S=n]\cap[T=n+1]} X_{n+1}\,dP + \int_{A\cap[S=n]\cap[T\geqslant n+2]} X_{n+1}\,dP \leqslant$$

$$\int_{A\cap[S=n]\cap[T=n]} X_n\,dP + \int_{A\cap[S=n]\cap[T=n+1]} X_{n+1}\,dP + \int_{A\cap[S=n]\cap[T\geqslant n+2]} X_{n+2}\,dP \leqslant$$

$$\ldots \leqslant \sum_{i=n}^{N} \int_{A\cap[S=n]\cap[T=i]} X_i\,dP = \int_{A\cap[S=n]\cap[T\geqslant n]} X_T\,dP = \int_{A\cap[S=n]} X_T\,dP.$$

□

Udowodnimy teraz tzw. twierdzenie o opcjonalym zatrzymaniu dla submartyngałów z ograniczonym czasem (mowimy też z "z ograniczonym horyzontem czasowym").

Twierdzenie. Niech $(X_n)_{n=1}^N$ będzie submartyngałem ze wzgledu na filtrację $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^N$ i niech $1 \leqslant S \leqslant T \leqslant N$ będą czasami zatrzymania ze względu na tę samą filtrację. wtedy $X_S \leqslant E(X_T|\mathcal{F}_S)$. (Innymi słowy dwuelementowy proces stochastyczny (X_S, X_T) jest submartyngałem ze wzgledu na dwuelementową filtrację $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.)

Dowód. Niech $A \in \mathcal{F}_S$. Z powyższego lematu mamy

$$\int_A X_S\,dP = \sum_{n=1}^{N} \int_{A\cap[S=n]} X_S\,dP \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{A\cap[S=n]} X_T\,dP = \int_A X_T\,dP.$$

□