CAŁKA STOCHASTYCZNA I TEORIA MARTYNGAŁÓW

WYKŁAD 7

2020/21

MOMENTY ZATRZYMANIA DLA CZASU CIĄGŁEGO, MARTYNGAŁY Z CZASEM CIĄGŁYM, σ-ALGEBRA ZBIORÓW PRZEWIDYWALNYCH

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. W dalszym ciągu będziemy rozważać filtracje $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$, gdzie, jak w przypadku czasu dyskretnego, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ dla $s < t$. Zakładać też będziemy, że taka filtracja jest *zupełna*, tzn. $\mathcal{F}_0$ zawiera wszystkie zdarzenia o prawdopodobieństwie zero, a także, że jeśli $P(A) = 0$ i $B \subseteq A$ to $B \in \mathcal{F}_0$. O filtracji będziemy mówić, że jest *prawostronnie ciągła*, jeśli

$$\bigcap_{t>t_0} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_0}$$

dla każdego $t_0 \in \mathcal{R}_+$. O filtracji będziemy mówić, że jest *lewostronnie ciągła*, jeśli

$$\sigma\left(\bigcup_{t<t_0} \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{F}_{t_0}$$

dla każdego $t_0 > 0$. Będziemy też rozważać filtracje $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$, (na ogół) zakładając, że

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\in\mathcal{R}_+} \mathcal{F}_t\right).$$

Dalej zawsze będziemy zakładać, że każda rozważana filtracja jest prawostronnie ciągła. *Czasem zatrzymania* dla takiej ustalonej filtracji będziemy nazywali zmienną losową $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ taką, że $[\tau \leqslant t] \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in [0,\infty)$. Mówimy, że czas zatrzymania τ jest *przewidywalny*, jeśli istnieje niemalejący ciąg czasów zatrzymania $(\tau_n)_n$ zbieżny punktowo do τ taki, że dla każdego n i dla każdego $\omega \in \Omega$ zachodzi nierówność $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$, jeśli tylko $\tau(\omega) > 0$. Odcinkiem stochastycznym nazywamy zbiór postaci

$$[[\tau, \xi]] := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : \tau(\omega) \leqslant t \leqslant \xi(\omega)\}$$

lub

$$((\tau, \xi]] := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : \tau(\omega) < t \leqslant \xi(\omega)\},$$

lub

$$[[\tau, \xi)) := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : \tau(\omega) \leqslant t < \xi(\omega)\},$$

lub

$$((\tau, \xi)) := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : \tau(\omega) < t < \xi(\omega)\}.$$

Zauważmy, że odcinek stochastyczny nie zawiera punktów spoza $\Omega \times \mathbb{R}_+$, a więc nawet jeśli $\xi(\omega) = \infty$, to punkt (ω, ∞) nie należy do odcinak stochastycznego $[[\tau, \xi]]$. σ-algebrę podzbiorów $\Omega \times \mathbb{R}_+$ generowaną przez odcinki stochastyczne nazywamy *σ-algebrą zbiorów opcjonalnych*, a jej elementy zbiorami opcjonalnymi. Oznaczamy tę σ-algebrę przez Σ_o. σ-algebrę podzbiorów $\Omega \times \mathbb{R}_+$ generowaną przez odcinki stochastyczne zadane przez przewidywalne czasy zatrzymania τ i ξ nazywamy *σ-algebrą*

zbiorów przewidywalnych, a jej elementy zbiorami przewidywalnymi. Oznaczamy tę σ-algebrę przez Σ_p.

Załóżmy, że ustalona jest pewna filtracja $(\mathcal{F}_t)_t$. Ważną rolę w dalszej części wykładu odegrają zbiory postaci $F \times (s,t]$, gdzie $s < t$ i $F \in \mathcal{F}_s$. Zachodzi nastepujące twierdzenie

Twierdzenie 1. Zbiory postaci $F \times (s,t]$, gdzie $s < t$ i $F \in \mathcal{F}_s$ oraz $E \times \{0\}$, $E \in \mathcal{F}_0$, generują σ-algebrę Σ_p.

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że zbiory te są przewidywalne, a więc generowana przez nie σ-algebra jest zawarta w Σ_p. Niech $s_n := s + \frac{1}{n}$. Niech n_0 bedzie na tyle duże, aby $s_{n_0} = s + \frac{1}{n_0} < t$. Zauważmy, że $\gamma_n := \mathbf{1}_F s_n$ jest czasem zatrzymania. Aby to pokazać, trzeba udowodnić, że dla każdego $u \in \mathbb{R}_+$ zdarzenie $[\gamma_n \leqslant u]$ jest elementem σ-algebry $\mathcal{F}_u$. Rozważmy przypadek, gdy $[s_n \leqslant u]$. Wtedy

$$[\gamma_n \leqslant u] = \Omega.$$

Jeśli $[s_n > u]$, to

$$[\gamma_n \leqslant u] = F^c \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_u.$$

Zbiory postaci $E \times \{0\}$ są odcinkami stochastycznymi $[[\infty \mathbf{1}_{E^c}, \infty \mathbf{1}_{E^c}]]$; czas zatrzymania $\infty \mathbf{1}_{E^c}$ jest przewidywalny, ponieważ $n\mathbf{1}_{E^c} \xrightarrow{n} \infty \mathbf{1}_{E^c}$.

Pozostaje pokazać implikację odwrotną, czyli, że σ-algebra Σ_p jest zawarta w σ-algebrze generowanej przez zbiory postaci $F \times (s,t]$, gdzie $s < t$ i $F \in \mathcal{F}_s$. Wystarczy pokazać, że generatory Σ_p, czyli odcinki stochastyczne o końcach będących przewidywalnymi czasami zatrzymania są elementami σ-algebry generowanej przez zbiory postaci $F \times (s,t]$. Pokażemy najpierw, że każdy odcinek stochastyczny postaci $[[\tau, \infty))$, gdzie τ jest przewidywalnym czasem zatrzymania, jest w takiej σ-algebrze. Ponieważ τ jest przewidywalnym czasem zatrzymania, więc istnieje niemalejący ciąg czasów zatrzymania $(\tau_n)_n$ taki, że $\tau_n \nearrow \tau$ i $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$, jeśli $\tau(\omega) > 0$. Pokzażmy najpierw, że

$$((\tau_n, \infty]] = \bigcup_m \bigcup_k \left[\frac{k}{2^m} \leqslant \tau_n < \frac{k+1}{2^m}\right] \times \left(\frac{k+1}{2^m}, \infty\right). \tag{1}$$

Załóżmy, że

$$(\omega, t) \in ((\tau_n, \infty]], \tag{2}$$

tzn. $\tau(\omega) < t$. Niech m będzie na tyle duże, że $\frac{1}{2^m} < t - \tau(\omega)$. Dla pewnego k mamy

$$\frac{k}{2^m} \leqslant \tau_n < \frac{k+1}{2^m}$$

i z wyboru m dostajemy $t > \frac{k+1}{2^m}$. Zatem

$$(\omega, t) \in \bigcup_m \bigcup_k \left[\frac{k}{2^m} \leqslant \tau_n < \frac{k+1}{2^m}\right] \times \left(\frac{k+1}{2^m}, \infty\right). \tag{3}$$

Załóżmy, teraz, że zachodzi (3). Mamy więc dla pewnych k, m:

$$\frac{k}{2^m} \leqslant \tau_n(\omega) < \frac{k+1}{2^m} < t,$$

a więc w szczególności

$$\tau_n(\omega) < t,$$

czyli zachodzi (2). Tak więc pokazaliśmy, że zachodzi (1).

Ponieważ

$$\left(\frac{k+1}{2^m}, \infty\right) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{2^m} + i, \frac{k+1}{2^m} + i + 1\right]$$

oraz

$$\left[\frac{k}{2^m} \leqslant \tau_n < \frac{k+1}{2^m}\right] \in \mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}} \subseteq \mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^m}+i},$$

więc $((\tau_n, \infty]]$ jest w σ-algebrze generowanej przez zbiory postaci $F \times (s, t]$, gdzie $F \in \mathcal{F}_s$.

Zatem także $[[\tau, \infty))$ jest w tej σ-algebrze, ponieważ

$$[[\tau, \infty)) = \bigcap_n ((\tau_n, \infty]] \cup [\tau = 0] \times \{0\}.$$

Pokazaliśmy dotychczas, że odcinki stochastyczne postaci $[[\tau, \infty))$, gdzie τ jest przewidywalnym czasem zatrzymania są w σ-algebrze generowanej przez zbiory postaci $F \times (s, t]$, gdzie $F \in \mathcal{F}_s$.

Niech teraz τ bedzie dowolnym czasem zatrzymania (względem naszej ustalonej filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$). Czasy

$$\tau + \frac{1}{n}$$

są przewidywalnymi czasami zatrzymania oraz

$$((\tau, \infty)) = \bigcup_n ((\tau + \frac{1}{n}, \infty)),$$

a ponieważ o odcinkach stochastycznych pod sumą po prawej stronie równości wiemy, że są w σ-algebrze generowanej przez zbiory postaci $F \times (s, t]$, więc teraz wiemy to już także o odcinku stochastycznym $((\tau, \infty))$. Zauważmy, że tu nawet nie żądamy, aby τ był przewidywalny.

Mamy dla przewidywalnych czasów zatrzymania $\tau \leqslant \eta$:

$$[[\tau, \eta)) = [[\tau, \infty)) \setminus [[\eta, \infty)),$$

$$[[\tau, \eta]] = [[\tau, \infty)) \setminus ((\eta, \infty)),$$

$$((\tau, \eta]] = [[\tau, \infty)) \setminus ((\eta, \infty)),$$

oraz

$$((\tau, \eta)) = ((\tau, \eta]] \cap [[\tau, \eta)).$$

Równości te oraz fakt, że odcinki stochastyczne

$$[[\tau, \infty))$$

i

$$((\eta, \infty))$$

należą do σ-algebry generowanej przez zbiory postaci $F \times (s, t]$, $F \in \mathcal{F}_s$, pokazują, że w tej σ-algebrze są wszystkie odcinki stochastyczne o końcach przewidywalnych. To kończy dowód.

$\square$

Mówimy, że proces stochastyczny $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ jest *adaptowany do filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$, jeśli dla każdego $t \in [0,\infty)$ zmienna losowa X_t jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna. Faktycznie dla zadanej filtracji zawsze zakładamy adaptowalność rozważanych procesów. Mówimy, że proces stochastyczny $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ jest *prawostronnie ciągły* (*lewostronnie ciągły*) lub, w skrócie, CAD (CAG), jeśli prawie każda jego trajektoria $X_{(\cdot)}(\omega)$ jest prawostronnie (lewostronnie) ciągła w każdym punkcie $t \in \mathbb{R}_+$ ($t > 0$). Przez LAG (CAG) oznaczamy klasę zgodnych z filtracją procesów, których prawie wszystkie trajektorie $X_{(\cdot)}(\omega)$ (tzn. dla p.w. $\omega \in \Omega$) mają granicę lewostronną $\lim_{s\to t^-} X_s(\omega)$ (prawostronną $\lim_{s\to t^+} X_s(\omega)$) w każdym $t \in \mathbb{R}_+$. Pojęcia te łączymy, i tak np. klasa CADLAG to klasa procesów o trajektoriach prawostronnie ciągłych z istniejacymi wszędzie lewostronnymi granicami.

Adaptowany do zadanej filtracji $(\mathcal{F}_t)_t$ proces stochastyczny $(\mathcal{F}_t)_t$ nazywamy *martyngałem*, *submartyngałem*, *supermartyngałem*, jeśli dla każdych $s, t \in \mathbb{R}_+$, $s \leqslant t$ mamy $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$, odpowiednio $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$, p.w. Oczywiście są to przeniesienia analogicznych pojęć z przypadku czasu dyskretnego na przypadek czasu ciągłego.