Celem kursu jest zapoznanie Państwa z technikami umożliwiającymi posługiwanie się zaawansowanymi metodami analitycznymi, a przede wszystkim probabilistycznymi. Chcąc wykroczyć poza elementarny rachunek prawdopodobieństwa na przestrzeniach dyskretnych, musimy odwoływać się do głębszych metod analitycznych. Ten kurs ma wyposażyć słuchaczy w wiedzę z zakresu topologii i teorii miary pozwalającą na studiowanie już bez ograniczeń rachunku prawdopodobieństwa i analizy matematycznej.

Proszę zapoznać się z materiałem, szczególnie zwracając uwagę na zadania pozostawione do samodzielnego rozwiązania. Zadania te stanowią często istotną część wykładu i nie mogą być pomijane.

PRZESTRZENIE METRYCZNE, PODSTAWOWE POJĘCIA

Podstawowym pojęciem topologii metrycznej jest pojęcie przestrzeni metrycznej. Wiemy już, że na prostej czy na płaszczyźnie, mając dwa punkty, możemy okreslić odległość między nimi. Na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ punkty to po prostu liczby; niech więc $a, b \in \mathbb{R}$. Odległość od punktu a do b to po prostu $|a - b|$. Na płaszczyznie $\mathbb{R}^2$ punkty to pary liczb, niech więc $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$. Odległość od a do b to zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa: $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$.

Przestrzeń metryczna to zbiór, w którym określona jest odległość między elementami tego zbioru, nazywanymi *punktami*. Bardziej precyzyjnie: *przestrzenią metryczną* nazywamy parę (X, d), gdzie X jest dowolnym ustalonym zbiorem, zaś $d : X^2 \to [0, \infty)$ jest funkcją z kwadratu kartezjańskiego zbioru X (czyli zbioru wszystkich par punktów zbioru X) w zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych spełniająca następujące trzy warunki dla dowolnych punktów $a, b, c \in X$:

1) $d(a, b) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$;

2) $d(a, b) = d(b, a)$ (symetria);

3) $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$ (warunek trójkąta).

Powyższą funkcję d nazywamy *metryką* lub *odległoscią* na X.

W poniższych ćwiczeniach znajdują sie przykłady przestrzeni metrycznych. Wykazanie, że dana para (X, d) jest przestrzenią metryczną sprowadza sie zazwyczaj do pokazania, że d spełnia warunek trójkata (warunek 3); pozostałe dwa warunki są zazwyczaj trywialnie spełnione.

Zadanie 1. Pokazać, że para $(\mathbb{R}, d_1)$, gdzie $d_1(a, b) := |a - b|$, jest przestrzenią metryczną. Odległość d_1 nazywamy *odległością euklidesową* na prostej.

Zadanie 2. Pokazać, że para $(\mathbb{R}^2, d_2)$, gdzie

$$d_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

jest przestrzenią metryczną. Odległość d_2 nazywamy *odległością euklidesową* na płaszczyźnie.

Zadanie 3. Pokazać, że para $(\mathbb{R}^n, d_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$d_n((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2},$$

jest przestrzenią metryczną. Odległość d_n nazywamy *odległością euklidesową* w przestrzeni n-wymiarowej, a przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_n)$ nazywamy *n-wymiarowa przestrzenią euklidesową.*

Zadanie 4. Pokazać, że para $(\mathbb{R}^n, \rho_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$\rho_n((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) := |a_1 - b_1| + \ldots + |a_n - b_n|,$$

jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 5. Pokazać, że para $(\mathbb{R}^n, \delta_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) := \max\{|a_1 - b_1|, \ldots, |a_n - b_n|\},$$

jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 6. Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$. Odległość $d(a, b)$ od a do b definijemy jako 0, jeśli $a = b$ (skądinąd, jesteśmy do tego zmuszeni, prawda?), natomiast jeśli $a \neq b$, to $d(a, b)$ to suma odległości (euklidesowych) tych punktów od punktu $(0, 0)$. Pokazać, że $(\mathbb{R}^2, d)$ jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 7. Zadanie to jest pewną modyfikacją zadania poprzedniego. Niech $a, b \in \mathbb{R}^2$. Odległość $d'(a, b)$ od a do b definijemy jako 0, jeśli $a = b$; natomiast jeśli $a \neq b$, to $d'(a, b)$ jest euklidesową odległością od a do b, jeśli punkty $a, b, (0, 0)$ leżą na jednej prostej, jeśli zaś nie, to to $d'(a, b)$ jest sumą odległości (euklidesowych) tych punktów od punktu $(0, 0)$. Pokazać, że $(\mathbb{R}^2, d')$ jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 8. Niech X bedzie dowolnym zbiorem i $a, b \in X$. Niech

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad a = b \\ 1, & \text{jeśli} \quad a \neq b. \end{cases}$$

Pokazać, że (X, d) jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 9. Niech $[c, d]^{[a,b]}$ będzie rodziną wszystkich funkcji z odcinka $[a, b]$ w odcinek $[c, d]$. Niech dla $f, g \in [c, d]^{[a,b]}$

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Pokazać, że $([c, d]^{[a,b]}, d)$ jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 10. Niech $C[0, 1]$ bedzie rodzina wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$. Niech

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Pokazać, że $(C[0, 1], d)$ jest przestrzenią metryczną. Pokazać, że tu "sup" w definicji można zastapić przez "max".

Niech (X, d) bedzie przestrzenia metryczna. *Kulą otwartą* $B(x_0, r)$ o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Czasami będziemy mówić po prostu: *kula.*

Kulą domkniętą $B[x_0, r]$ o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant r\}.$$

Sferą $S(x_0, r)$ o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Zadanie 11. Czym jest kula otwarta na prostej w metryce euklidesowej o środku w $x_0 \in \mathbb{R}$?

Zadanie 12. W przestrzeniach w zadaniach 4,5 dla $n = 2$ wyznaczyć $B((0, 0), 1)$.

Zadanie 13. W przestrzeniach w zadaniach 6,7 wyznaczyć kule $B((1, 1), 2)$.

Zadanie 14. Niech (X, d) będzie przestrzenia metryczną z zadania 9. Niech $x \in X$. Czym są kule $B(x, 1)$ i $B(x, 2)$?

Zadanie 15. Niech $f : [0, 2] \to [0, 2]$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad x = 1, \\ 0, & \text{jeśli} \quad x \neq 1. \end{cases}$$

Pokazac, że w kuli $B(f, 1/2)$ w przestrzeni $([0, 2]^{[0,2]}, d)$ z zadania 9 nie ma funkcji ciagłych. A w kuli $B(f, 1)$?

Niech (X, d) będzie przestrzenia metryczną. *Zbiorem otwartym* w tej przestrzeni nazywamy każdy zbiór U o tej własności, że jeśli $x \in U$, to istnieje $\epsilon > 0$, takie, że $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Słowem, jeśli punkt należy do zbioru otwartego, to w tym zbiorze zawiera się też pewna kula otwarta o środku w tym punkcie. Zbiór $F \subseteq X$ nazywamy *domkniętym*, jeśli dopełnienie tego zbióru, $F^c = X \setminus F$, jest zbiorem otwartym. Zbiór, który jest jednocześnie zbiorem otwartym i domkniętym nazywamy zbiorem *otwarto-domkniętym*.

Zauważmy, że zbiór pusty jest zarówno domknięty jak i otwarty. To samo możemy powiedzieć o całej przestrzeni X. Są to więc w każdej przestrzeni zbiory otwarto-domknięte.

Zadanie 16. Udowodnić, że w dowolnej przestrzeni metrycznej kula otwarta jest zbiorem otwartym, a kula domknięta i sfera są zbiorami domkniętymi.

Zadanie 17. Pokazać, że suma dowolnej ilości zbiorów otwartych w danej przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym.

Zadanie 18. Pokazać, że przekrój dwóch zbiorów otwartych w danej przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym. Wyprowadzić stąd wniosek, że przekrój skończonej liczby zbiorów otwartych w danej przestrzeni metrycznej jest zbiorem otwartym.

Zadanie 19. Pokazać, że przekrój dowolnej ilości zbiorów domkniętych w danej przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 20. Pokazać, że suma dwóch zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Wyprowadzić stąd wniosek, że suma skończonej liczby zbiorów domkniętych w danej przestrzeni metrycznej jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 21. Podać przykład ciągu zbiorów otwartych na prostej, przekrój których nie jest zbiorem otwartym.

Zadanie 22. Z zadania 21 wyprowadzić wniosek, że suma przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $(x_n)_n$ będzie ciągiem punktów z X. Mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny* do pewnego punktu $x \in X$, jeśli ciąg odległości $d(x_n, x)$ jest zbieżny do zera, $d(x_n, x) \to 0$. Piszemy wtedy $x_n \to x$ lub $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Punkt x nazywamy *granicą* ciągu $(x_n)_n$.

Podamy teraz pewną bardzo użyteczną charakteryzację zbiorów domkniętych.

Twierdzenie 1. Niech (X, d) będzie przestrzenia metryczną. Zbiór $F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbieżnego ciągu punktów z F jego granica leży także w zbiorze F.

Dowód. Załóżmy, najpierw, że F jest podzbiorem domkniętym X. Niech $x_n \to x$ i $x_n \in F$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Mamy wykazać, że $x \in F$. Załóżmy nie wprost, że $x \in F^c = X \setminus F$. Ponieważ, z założenia, F^c jest zbiorem otwartym, więc dla pewnego $\varepsilon > 0$ kula $B(x, \varepsilon)$ leży w F^c. Ponieważ $x_n \to x$, czyli $d(x_n, x) \to 0$, więc, z definicji zbieżności ciągu liczbowego, dla dostatecznie dużych n mamy $d(x_n, x) < \varepsilon$, czyli $x_n \in B(x, \varepsilon)$, ale tu już dostajemy sprzeczność, bo $x_n \in F$ i $B(x, \varepsilon) \subseteq F^c$.

Załóżmy teraz, że każdego zbieżnego ciągu punktów z F jego granica leży także w zbiorze F. Mamy wykazać, że F jest zbiorem domknietym, tzn. F^c jest zbiorem otwartym. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. To oznacza, że istnieje taki punkt x w zbiorze F^c, że dla każdego $\varepsilon > 0$ kula $B(x, \varepsilon)$ nie leży w całości w F^c, tzn. pewien jej punkt x leży w F. Dla $\varepsilon = 1/n$ wybierzmy taki punkt i nazwijmy x_n. Mamy $d(x_n, x) < 1/n$ i $x_n \in F$. Zatem dostaliśmy ciąg punktów z F taki, że $d(x_n, x) \to 0$, czyli $x_n \to x$. Stąd, z naszego założenia o F, i punkt x powinien być w F, ale $x \in F^c$. I tu dostaliśmy sprzeczność.

$\square$

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $A \subseteq X$. *Domknięciem* zbioru A nazywamy zbiór wszystkich takich punktów x z przestrzeni F, dla których istnieje ciąg $(x_n)_n$ punktów z A zbiezny do x. Domknięcie A oznaczamy symbolem $\mathrm{cl}(A)$ lub $\overline{A}$. *Wnętrzem* zbioru A nazywamy zbiór tych punktów x z A, dla których istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ (ε oczywiście zależy od x). Wnętrze A oznaczamy symbolem $\mathrm{int}(A)$.

Zadanie 23. Pokazać, że dla każdego podzbioru A przestrzeni metrycznej zbiór $\mathrm{cl}(A)$ jest domknięty, a zbiór $\mathrm{int}(A)$ jest otwarty.

Zadanie 24. Pokazać, że zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cl}(A) = A$.

Zadanie 25. Pokazać, że zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{int}(A) = A$.

Zadanie 26. Zauważyć, że $\mathrm{int}(A) \subseteq A$ oraz $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

Zadanie 27. Niech $\mathbb{Q}$ będzie zbiorem liczb wymiernych na prostej. Pokazać, że $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ oraz $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Zadanie 28. Pokazać, że domknięcie kuli otwartej jest podzbiorem kuli domkniętej. Podać przykład, że może to być podzbiór właściwy.

Zadanie 29. pokazać, że $\mathrm{cl}(A)$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A, a $\mathrm{int}(A)$ jest najwiekszym zbiorem otwartym zawartym w A.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy *gęstym* w X, jeśli dla kazdego $x \in X$ i kazdego $\varepsilon > 0$ w kuli $B(x, \varepsilon)$ leży punklt z A, tzn. $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Twierdzenie 2. Niech (X, d) będzie przestrzenia metryczną. Zbiór A jest gesty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cl}(A) = X$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mathrm{cl}(A) = X$. Niech $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Mamy pokazać, że $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Z założenia istnieje ciąg punktów z A $x_n \to x$. Zatem z definicji zbieżności od pewnego indeksu wszystkie punkty x_n leżą w kuli $B(x, \varepsilon)$. Zatem istotnie A jest gęsty w X.

Załóżmy teraz, że A jest gęsty w X. Niech $x \in X$ będzie dowolnym punktem. Mamy pokazać, że $x \in \mathrm{cl}(A)$, tzn. istnieje ciąg punktów $(x_n)_n$ z A zbieżny do x. Z gestości A wiemy, że $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ dla każdego n. Niech x_n bedzie pewnym punktem z $B(x, 1/n) \cap A$, Zatem $d(x_n, x) < 1/n$. Stąd $d(x_n, x) \to 0$, czyli $x_n \to x$.

$\square$