W tym wykładzie kontynuujemy omawianie własności przestrzeni zwartych.

**PRZESTRZENIE METRYCZNE ZWARTE -c.d.**

Poznaliśmy dwie ważne rodziny przestrzeni metrycznych: przestrzenie zupełne i przestrzenie zwarte. Pojęcie zwartości jest silniejsze. Mówi o tym następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 13.** Każda przestrzeń zwarta jest zupełna.

Zadanie 1. Udowodnić twierdzenie 13.

Zwartość jest niezmiennikiem przekształceń ciągłych, co orzeka następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 14.** Niech $(X, d)$ $(Y, \rho)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Jeśli $K \subseteq X$ jest zbiorem zwartym w $X$ i $f : K \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, to $f[K]$ jest zbiorem zwartym w $Y$.

Dowód. Niech $(y_n)_n$ będzie ciągiem punktów z $f[K]$. Mamy dla każdego $n$

$$f(x_n) = y_n$$

dla pewnego punktu $x_n$ z $K$. Ponieważ $K$ jest zwarty, więc istnieje podciąg $(x_{n_k})_k$ zbieżny do pewnego punktu $x$ z $K$, tzn.

$$\lim_k x_{n_k} = x \in K.$$

Ponieważ $f$ jest odwzorowaniem ciągłym, więc

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(x) \in f[K].$$

I tak z ciągu $(y_n)_n$ elementów $f[K]$ wybraliśmy podciąg, $(f(x_{n_k}))_k = (y_{n_k})_k$ zbieżny do punktu z $f[K]$.

$\square$

Zadanie 2. Pokazać, że istnieje funkcja ciągła z prostej rzeczywistej na odcinek $[-1, 1]$. Czy przeciwobraz zbioru zwartego przez odwzorowanie ciągłe musi być zwarty?

Zadanie 3. Pokazać, że rodzina $L_C([0, 1], [0, 1])$ funkcji z odcinka $[0, 1]$ w odcinek $[0, 1]$, które spełniają warunek Lipschitza ze stałą $C$ ($|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$) jest podzbiorem zwartym przestrzeni $C[0, 1]$.

Zadanie 4. Czy rodzina $C([0, 1], [0, 1])$ funkcji ciagłych z odcinka $[0, 1]$ w odcinek $[0, 1]$ jest zwarta?

Zadanie 5. Czy rodzina $C([0,1],[0,1])$ jest podzbiorem domkniętym $C[0,1]$?

Mówimy, że rodzina $\mathcal{U}$ podzbiorów przestrzeni metrycznej $(X,d)$ jest pokryciem zbioru $A \subseteq X$, jeśli $A$ zawiera się w sumie teoriomnogościowej wszystkich zbiorów z $\mathcal{U}$:

$$A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Zachodzi nastepująca charakteryzacja zbiorów zwartych.

**Twierdzenie 15.** Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną. Przestrzeń $X$ jest zwarta, wtedy i tylko wtedy, gdy z każdej rodziny $\mathcal{U}$ zbiorów otwartych bedącej pokryciem $X$ można wybrać podrodzinę skończoną, która nadal jest pokryciem $X$ (taką rodzinę nazywamy *podpokryciem* $\mathcal{U}$).

Zanim udowodnimy to twierdzenie, sformułujemy i udowodnimy lemat o rodzinach scentrowanych oraz lemat o ośrodkowosci zbiorów zwartych.

Mówimy, że rodzina zbiorów $\mathcal{K}$ jest *scentrowana*, jeśli dla każdej jej skończonej podrodziny $\{K_1, \ldots, K_n\}$ przekrój jej elementów $K_1 \cap \ldots \cap K_n$ jest niepusty.

**Lemat 1.** Jeśli przeliczalna scentrowana rodzina $\mathcal{K}$ składa się z podzbiorów zwartych tej samej przestrzeni metrycznej $(X,d)$, to przekrój wszystkich elementów rodziny $\mathcal{K}$ jest niepusty.

Dowód. Niech $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots\}$. Z założenia

$$K_1 \cap \ldots \cap K_n \neq \emptyset.$$

Każdy taki przekrój jest zbiorem zwartym, bo jest zbiorem domkniętym i podzbiorem $K_1$-zbioru zwartego. Otrzymujemy więc zstępujący ciąg niepustych zbiorów zwartych $K_1 \supseteq K_1 \cap K_2 \supseteq \ldots$ i z twierdzenia 10:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_1 \cap \ldots \cap K_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

$\square$

**Lemat 2.** Każda przestrzeń metryczna zwarta $(X,d)$ jest *ośrodkowa*, tzn. zawiera przeliczalny podzbiór gęsty.

Dowód. Niech $A_n$ bedzie maksymalnym podzbiorem $X$ takim, że każde dwa punkty w $A_n$ odległe są od siebie o nie mniej niż o $1/n$ (istnienie takiego zbioru maksymalnego wynika np. z lematu Kuratowskiego-Zorna). Gdyby zbiór $A_n$ był nieskończony, zawierałby ciąg, którego wszystkie elementy odległe byłyby od siebie o nie mniej niż $1/n$, a więc nie spełniający warunku Cauchy'ego, a zatem rozbieżny, a to stanowiłoby sprzeczność z założeniem o zwartości przestrzeni $X$. Teraz zauważmy, że z maksymalności $A_n$ wynika, że każdy punkt z przestrzeni $X$ jest odległy od pewnego punktu z $A_n$ o mniej niż $1/n$. Gdyby tak nie było, to można by ten punkt dodać do $A_n$, i tak powiększony zbiór miałby tę sama własność co $A_n$, tzn. każde dwa punkty w $A_n$ odległe są od siebie o nie mniej niż o $1/n$, a to przeczyłoby temu, że

$A_n$ jest maksymalnym zbiorem o tej własności. Stąd już wynika, że zbiór

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

jest gęsty w $X$.

$\square$

Dowód twierdzenia 15. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X$ jest zwarta. Niech rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ będzie pokryciem $X$. Zatem z lematu 2 jet to przestrzeń ośrodkowa. Niech $D$ bedzie przeliczalnym zbiorem gęstym (*ośrodkiem*). Wiemy, że kule o środkach w punktach tego zbioru i promieniach wymiernych tworzą bazę przestrzeni. Jest to baza przeliczalna. Nazwijmy ją $\mathcal{B}$. Niech rodzinę $\mathcal{H}$ tworzą tylko te elementy z $\mathcal{B}$, które sa podzbiorami jakiegoś zbioru z $\mathcal{U}$. Ponieważ elementy bazy zawarte w dowolnym ustalonym zbiorze otwartym $U$ wysumowują każdy taki zbiór, tzn.

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B},\ B \subseteq U} B,$$

więc rodzina $\mathcal{H}$ też stanowi pokrycie $X$. Twierdzimy teraz, że istnieje skończona podrodzina $\mathcal{H}'$ rodziny $\mathcal{H}$ będąca pokryciem $X$. Załóżmy, nie wprost, że taka rodzina nie istnieje. Rozważmy rodzinę $\mathcal{C}$ dopełnień zbiorów z $\mathcal{H}$. Zbiory z $\mathcal{C}$ sa domkniętymi podzbiorami przestrzeni zwartej, a więc same są zwarte. Ponieważ żadna skończona suma zbiorów z $\mathcal{H}$ nie pokrywa $X$, więc żadna skończona podrodzina $\mathcal{C}$ nie ma pustego przekroju, czyli $\mathcal{C}$ jest scentrowana, a zatem z lematu 1 przekrój wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{C}$ jest niepusty. To z kolei oznacza, że suma wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{H}$ nie jest cała przestrzenią, a więc $\mathcal{H}$ nie jest pokryciem $X$ i tu dostajemy sprzeczność. To jednak jeszcze nie koniec dowodu, bo dotychczas wybraliśmy pewne skończone podpokrycie $\mathcal{H}' = \{H_1, \ldots, H_n\}$ z rodziny $\mathcal{H}$. Aby zakończyć dowód zauważamy, że każdy element z $\mathcal{H}$, a więc i z $\mathcal{H}'$, jest podzbiorem pewnego elementu z $\mathcal{U}$. Niech więc

$$H_1 \subseteq U_1 \in \mathcal{U}, H_2 \subseteq U_2 \in \mathcal{U}, \ldots, H_n \subseteq U_n \mathcal{U}$$

Oczywiście rodzina $\{U_1, \ldots, U_n\}$ jest też pokryciem $X$.

($\Leftarrow$) Załóżmy teraz, że z każdego pokrycia zbiorami otwartymi przestrzeni $X$ można wybrać podpokrycie skończone. Niech $(x_n)_n$ będzie dowolnym ciągiem punktów z $X$. Jeśli ciąg ten nie miałby żadnego podciągu zbieżnego w $X$, to dla każdego punktu $z \in X$ istniałaby kula otwarta $B(z, r_z)$, taka, że dla pewnego $N_z \in \mathbb{N}$ punkty $x_n$ o indeksach $n \geqslant N_x$ leżałyby poza tą kulą (w przeciwnym razie znaleźlibyśmy podciąg zbieżny do $z$). Oczywiście kule $B(z, r_z)$ stanowią pokrycie $X$. Można więc wybrać skończone podpokrycie

$$X = B(z_1, r_{z_1}) \cup \ldots B(z_m, r_{z_m}).$$

Tu jednak dostajemy sprzeczność, bowiem okazuje się, że w ciągu $(x_n)_n$ nie ma wyrazów o indeksach wiekszych niż

$$N = \max\{N_{z_1}, \ldots, N_{z_m}\}.$$

$\square$

Zadanie 6. Jeśli scentrowana (tym razem niekoniecznie przeliczalna) rodzina $\mathcal{K}$ składa się z podzbiorów zwartych tej samej przestrzeni metrycznej $(X, d)$, to przekrój wszystkich elementów rodziny $\mathcal{K}$ jest niepusty.