Zaczynamy tym wykładem drugą część tego kursu - teorię miary.

σ-ALGEBRY ZBIORÓW

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Rodzinę $\mathcal{A}$ nazywamy *algebrą podzbiorów* X, jeśli $\mathcal{A}$ spełnia następujące trzy warunki:

i) Jeśli $A \in \mathcal{A}$, to $A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$ (zamkniętość na dopełnienia);

ii) jeśli $A, B \in \mathcal{A}$, to $A \cup B \in \mathcal{A}$ (zamkniętość na skończone sumowanie);

iii) $X \in \mathcal{A}$.

Rodzinę $\mathcal{F}$ nazywamy *σ-algebrą podzbiorów* (czytamy "sigma-algebrą podzbiorów") X, jeśli $\mathcal{F}$ spełnia następujące trzy warunki:

1) Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A^c := X \setminus A \in \mathcal{F}$ (zamkniętość na dopełnienia);

2) jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (zamkniętość na przeliczalne sumowanie);

3) $X \in \mathcal{F}$.

Zadanie 1. Każda σ-algebra podzbiorów zbioru X jest także algebrą podzbiorów X.

Zadanie 2. Jeśli $\mathcal{F}$ jest σ-algebrą podzbiorów zbioru X, to $\emptyset \in \mathcal{F}$ oraz jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Przykład 1. Rodzina $P(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X jest oczywiście σ-algebrą podzbiorów X.

Przykład 2. Rodzina $\{\emptyset, X\}$ jest (trywialną) σ-algebrą podzbiorów X.

Przykład 3 - zadanie 3. Pokazać, że rodzina wszystkich podzbiorów skończonych i ko-skończonych zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych:

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \aleph_0 \text{ lub } |A^c| < \aleph_0\}.$$

jest algebrą podzbiorów $\mathbb{N}$. Czy jest σ-algebrą podzbiorów $\mathbb{N}$?

Przykład 4 - zadanie 4. Pokazać, że rodzina wszystkich podzbiorów przeliczalnych i ko-przeliczalnych zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych:

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| \leqslant \aleph_0 \text{ lub } |A^c| \leqslant \aleph_0\}.$$

jest σ-algebrą podzbiorów $\mathbb{R}$.

Niebawem poznamy mniej trywialne (i bardziej użyteczne) przykłady σ-algebr.

Twierdzenie 19. Niech $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ będzie pewną rodziną σ-algebr podzbiorów tego samego zbioru X. Wtedy

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha$$

jest też σ-algebrą podzbiorów X.

Dowód. Niech $A \in \mathcal{F}$. Wtedy $A \in \mathcal{F}_\alpha$ dla każdego $\alpha \in \Lambda$. Ponieważ $\mathcal{F}_\alpha$ jest σ-algebrą podzbiorów X, więc także $A^c \in \mathcal{F}_\alpha$. Zatem $A^c \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}$, a więc $\mathcal{F}$ spełnia warunek 1) definicji σ-algebry.

Niech teraz $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Wtedy dla każdego $\alpha \in \Lambda$ zbiory A_i, $i = 1, 2, \ldots$, należą do rodziny $\mathcal{F}_\alpha$, a zatem, ponieważ $\mathcal{F}_\alpha$ jest σ-algebrą podzbiorów X, więc także suma tych zbiorów $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{F}_\alpha$. Ponieważ ma to miejsce dla każdego $\alpha \in \Lambda$, więc $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}$. Zatem $\mathcal{F}$ spełnia warunek 2) definicji σ-algebry.

Ponieważ dla każdego $\alpha \in \Lambda$ $\mathcal{F}_\alpha$ jest σ-algebrą podzbiorów X, więc $X \in \mathcal{F}_\alpha$ dla każdego $\alpha \in \Lambda$, a więc $X \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}$.

□

Niech teraz $\mathcal{D}$ bedzie pewną rodziną podzbiorów zbioru X. Definiujemy

$$\sigma(\mathcal{D}) := \bigcap_{\mathcal{F} \text{ jest } \sigma-\text{algebrą podzbiorów } X, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}} \mathcal{F}.$$

Zatem $\sigma(\mathcal{D})$ jest przekrojem wszystkich σ-algebr zawierających $\sigma(\mathcal{D})$. Rodzina takich σ-algebr jest niepusta ponieważ np. $\mathcal{D} \subseteq P(X)$. Z twierdzenia 19 wiemy, że $\sigma(\mathcal{D})$ jest σ-algebrą. Oczywiście jest to najmniejsza σ-algebra zawierająca rodzinę zbiorów $\mathcal{D}$. $\sigma(\mathcal{D})$ nazywamy σ-algebrą *generowaną* przez rodzinę $\mathcal{D}$.

Najważniejszym przykładem użycia pojęcia σ-algebry *generowanej* przez rodzinę zbiorów jest określenie σ-algebry podzbiorów borelowskich przestrzeni metrycznej.

Niech (X, d) bedzie przestrzenią metryczną. Niech $\mathcal{O}_X$ bedzie jej topologią, czyli rodziną wszystkich zbiorów otwartych. Rodzinę $\mathcal{B}(X)$ wszystkich podzbiorów *borelowskich* przestrzeni (X, d) definiujemy jako najmniejszą σ-algebrę podzbiorów X zawierającą wszystkie podzbiory otwarte X, czyli σ-algebrę generowaną przez zbiory otwarte, czyli

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}_X).$$

Zbiory z rodziny $\mathcal{B}(X)$ nazywamy podzbiorami *borelowskimi* przestrzeni X.

Zadanie 5. Pokazać, że wszystkie zbiory domknięte przestrzeni metrycznej są borelowskie. Pokazać także, że zbiory liczb wymiernych i niewymiernych są borelowskimi podzbiorami prostej rzeczywistej.

Zadanie 6. Pokazać, że zbiór wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$, które nie są stałe na żadnycm odcinku jest podzbiorem borelowskim $C[0, 1]$.

Zadanie 7. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną i niech $Y \subseteq X$. Wtedy Y można rozważać jako przestrzeń metryczną z tą samą metryką d ograniczoną do Y. Pokazać, że

$$\mathcal{B}(Y) = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Tak więc zbiory borelowskie w Y sa śladami na Y zbiorów borelowskich w X.