Kontynuujemy w tym wykładzie omawianie rodzin zbiorów zamkniętych na operacje teoriomnogościowe.

Klasy monotoniczne Niech X bedzie ustalonym zbiorem. Klasę $\mathcal{M}$ podzbiorów zbioru X o następujących własnościach nazywamy *klasą monotoniczną*:

1) jeśli zbiory $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ należą do klasy $\mathcal{M}$, to także ich suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{M}$;

2) jeśli zbiory $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ należą do klasy $\mathcal{M}$, to także ich przekrój $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ należy do $\mathcal{M}$.

Zadanie 1. Pokazać, że rodzina pozbiorów $\mathbb{R}$ złożona za zbiorów przeliczalnych i ko-przeliczalnych (tzn. takich, których dopełnienia są przeliczalne) jest klasą monotoniczną.

Zadanie 2. Niech X bedzie dowolnym zbiorem, a A podzbiorem X. Pokazać, że rodzina wszystkich pozbiorów X, które albo są podzbiorami A, albo są nadzbiorami $A^c = X \setminus A$ jest klasą monotoniczną.

Zadanie 3. Pokazać, że klasa podzbiorów X, która jest jednocześnie klasą monotoniczną i algebrą podzbiorów X, jest σ-algebrą podzbiorów X.

Zadanie 4. Niech X bedzie dowolnym ustalonym zbiorem. Niech $\mathcal{D}$ bedzie dowolną rodziną podzbiorów X. Pokazać, że istnieje najmniejsza klasa monotoniczna $M(\mathcal{D})$ zawierajaca $\mathcal{D}$. Wsk.: Rozważyć wszystkie klasy monotoniczne zawierajace $\mathcal{D}$ i pokazać, że ich przekrój też jest klasą monotoniczną.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 20. Jelśi $\mathcal{A}$ jest algebrą podzbiorów X, to najmniejsza klasa monotoniczna zawierajaca $\mathcal{A}$, $M(\mathcal{A})$, jest σ-algebrą zbiorów.

Dowód. Pokażemy, że $M(\mathcal{A})$ jest algebrą zbiorów. Z zadania 3 wynikać już bedzie, że jest to także σ-algebra.

Niech $A \in \mathcal{A}$ bedzie ustalonym zbiorem. Niech

$$\mathcal{S}_A = \{B \in M(\mathcal{A}) : B \cup A \in M(\mathcal{A})\}$$

Pokażemy, że

$$\mathcal{S}_A = M(\mathcal{A}).$$

Wystarczy pokazać, że $\mathcal{S}_A$ jest klasą monotoniczną i zawiera $\mathcal{A}$, ponieważ wtedy $M(\mathcal{A})$ jako najmniejsza taka klasa monotoniczna musi być podzbiorem tej rodziny, ale też, z definicji, $\mathcal{S}_A$ jest podrodziną $M(\mathcal{A})$.

Ponieważ $\mathcal{A}$ jest algebrą zbiorów, więc dla kazdego $B \in \mathcal{A}$ mamy oczywiście $B \cup A \in \mathcal{A}$. Zatem istotnie

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_A.$$

Załóżmy także, że $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$ sa elementami $\mathcal{S}_A$. Mamy

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in M(\mathcal{A})$$

ponieważ $M(\mathcal{A})$ jest klasą monotoniczną, oraz

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cup A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cup A).$$

Zbiory $B_i \cup A$ są elementami $M(\mathcal{A})$ (bo $B_i \in \mathcal{S}_A$) i

$$B_1 \cup A \subseteq B_2 \cup A \subseteq B_3 \cup A \subseteq \ldots,$$

a zatem

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cup A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cup A) \in M(\mathcal{A}).$$

A więc zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ należy do $\mathcal{S}_A$.

Podobnie pokazujemy, że jeśli $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ są elementami $\mathcal{S}_A$, to

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{S}_A.$$

Zatem istotnie $\mathcal{S}_A$ jest klasą monotoniczną i zawierającą $\mathcal{A}$.

Do tej pory więc pokazaliśmy, że suma dowolnego zbioru B z $M(\mathcal{A})$ i dowolnego zbioru A z $\mathcal{A}$ należy do $M(\mathcal{A})$. Musimy pokazać jednak więcej, mianowicie, że suma dowolnego zbioru B z $M(\mathcal{A})$ i dowolnego zbioru A także z $M(\mathcal{A})$ należy do $M(\mathcal{A})$.

Dopasowując się do notacji z części dowodu powyżej, ustalmy teraz zbiór $B \in M(\mathcal{A})$. Wiemy już, że rodzina

$$\mathcal{S}_B = \{A \in M(\mathcal{A}) : B \cup A \in M(\mathcal{A})\}$$

zawiera $\mathcal{A}$ (to właśnie pokazaliśmy dotychczas).

To, że $\mathcal{S}_B$ jest klasą monotoniczną, tzn. jest rodziną zamkniętą na przeliczalne sumy zbiorów wstępujących i przeliczalne przekroje zbiorów zstępujących, pokazujemy krok po kroku tak jak wyżej.

Zatem $M(\mathcal{A})$ musi być podrodziną $\mathcal{S}_B$, bo $M(\mathcal{A})$ jest najmniejszą klasą monotoniczną zawierającą $\mathcal{A}$. Ponieważ $\mathcal{S}_B$ była zdefiniowana jako podrodzina $M(\mathcal{A})$, więc

$$\mathcal{S}_B = M(\mathcal{A}).$$

A zatem sumując dowolny zbiór A z $M(\mathcal{A})$ z dowolnym zbiorem B z $M(\mathcal{A})$ nie wychodzimy poza $M(\mathcal{A})$.

Wiemy już, że $M(\mathcal{A})$ jest zamknięta na skończone sumy. Aby pokazać, że jest algebrą zbiorów, musimy jeszcze pokazać, że jest zamknięta na dopełnienia.

Niech

$$\mathcal{D} := \{A \in M(\mathcal{A}) : A^c \in M(\mathcal{A})\}.$$

Pokażemy, że $\mathcal{D}$ jest klasą monotoniczną zawierającą algebrę $\mathcal{A}$.

Zawieranie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ jest oczywiste z definicji $\mathcal{D}$.

Niech

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

będą elementami $\mathcal{D}$. Chcemy pokazać, że także $\bigcup_i A_i \in \mathcal{D}$. Ponieważ zbiory A_i są elementami $\mathcal{D}$, więc z definicji $\mathcal{D}$ zbiory

$$A_1^c \supseteq A_2^c \supseteq A_3^c \supseteq \dots$$

są elementami $\mathcal{A}$. Mamy:

$$(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c \in M(\mathcal{A})$$

ponieważ $M(\mathcal{A})$ jest klasą monotoniczną. Zatem istotnie $\bigcup_i A_i \in \mathcal{D}$.

Podobnie pokazujemy $\bigcap_i A_i \in \mathcal{D}$.

A zatem $\mathcal{D}$ jest klasą monotoniczną zawierającą $\mathcal{A}$, a więc

$$M(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D},$$

a ponieważ z definicji $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} \subseteq M(\mathcal{A})$$

więc ostatecznie

$$\mathcal{D} = M(\mathcal{A}). \tag{1}$$

(1) oznacza, że rodzina $M(\mathcal{A})$ zamknięta jest na dopełnienia zbiorów.

Pokazaliśmy więc, że rodzina $M(\mathcal{A})$ zamknięta jest na skończone sumy zbiorów i dopełnienia zbiorów. A zatem jest algebrą zbiorów, a ponieważ jest też klasą monotoniczną, więc jest też σ-algebrą (zadanie 3).

$\square$