Abstrakcyjna miara pozwala także na uogólnienie pojęcia całki oznaczonej. Po pierwsze możliwe będzie wprowadzenie całki na dowolnej przestrzeni miarowej, po drugie pojęcie to zastosowane dla przestrzeni miarowej $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$, a więc prostej z miarą Lebesgue'a na zbiorach borelowskich, pozwola na znaczne rozszerzenie pojęcia całki oznaczonej Riemanna na prostej rzeczywistej.

Całka z nieujemnej funkcji mierzalnej

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ bedzie przestrzenią miarową, $E \in \mathcal{F}$ i niech $f : E \to [0, \infty)$ bedzie funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną, gdzie mierzalność odnosimy do przestrzeni miarowej $(E, \mathcal{F} \cap \mathbf{P}(E), \mu|_{\mathcal{F} \cap \mathbf{P}(E)})$, tzn. przestrzeni zrelatywizowanej do E). Definiujemy całkę z funkcji f na zbiorze E jako

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in E_i\} \mu(E_i) : \right.$$

$$\left. E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{F}, i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset \right\}.$$

Ponieważ, dla dowolnego zbioru liczb nieujemnych A i nieujemnej stałej $\alpha \geqslant 0$ zachodzi wzór

$$\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A),$$

gdzie $\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$, więc

$$\int_E \alpha f(x)\, d\mu(x) = \alpha \int_E f(x)\, d\mu(x).$$

Łatwo widać też, że dla nieujemnych funkcji mierzalnych $f, g : E \to [0, \infty)$ jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ dla każdego $x \in E$, to

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \leqslant \int_E g(x)\, d\mu(x).$$

Zachodzi też inna monotoniczność, mianowicie ze względu na zbiory, po których całujemy.

Twierdzenie 34. Jesli $E \subseteq F$ i $E, F \in \mathcal{F}$, to dla dowolnej funkcji mierzalnej $f : F \to [0, \infty)$ zachodzi nierówność:

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \leqslant \int_F f(x)\, d\mu(x).$$

Dowód. Mamy dla dowolnego rozbicia zbioru E na sumę parami rozłącznych zbiorów mierzalnych $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in E_i\}\mu(E_i) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in E_i\}\mu(E_i) + \inf\{f(x) : x \in F \setminus E\}\mu(F \setminus E) \leqslant \int_F f(x)\, d\mu(x).$$

Zatem, biorąc supremum lewego wyrażenia po wszystkich rozbiciach $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, otrzymujemy

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) \leqslant \int_F f(x)\, d\mu(x).$$

□

Ustalmy teraz funkcję mierzalną $f : X \to [0, \infty)$. Gdy zbiory z $\mathcal{F}$, po których całkujemy, traktujemy jako argumenty, całka z tej ustalonej funkcji f okazuje sie być miarą.

Twierdzenie 35. Jeśli $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią miarową, a $f : X \to [0, \infty)$ funkcją mierzalną, to funkcja zbioru

$$\nu(A) := \int_A f(x) d\mu(x)$$

jest miarą na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$.

Dowód. Równość

$$\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f(x)\, d\mu(x) = 0$$

wynika natychmiast z definicji całki.

Pokażemy teraz przeliczalną addytywność ν.

Niech $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, gdzie $A_i \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne. Niech $\varepsilon > 0$. Niech

$$\alpha < \nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x).$$

Niech $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ będzie takim rozbiciem zbioru A na rozłączne zbiory B_j z $\mathcal{F}$, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in B_j\}\mu(B_j) > \alpha.$$

Niech

$$C_{i,j} := A_i \cap B_j.$$

Oczywiście, przy ustalonym j zbiory $C_{i,j}$ stanowią rozłączne rozbicie zbioru A. Mamy więc

$$\alpha < \sum_{j=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in B_j\}\mu(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in B_j\}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,j}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in B_j\} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \inf\{f(x) : x \in B_j\}\mu(C_{i,j}) \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\inf\{f(x) : x \in C_{i,j}\}\mu(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\inf\{f(x) : x \in C_{i,j}\}\mu(C_{i,j}) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} f(x)\,d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i).$$

Ponieważ α była dowolną liczbą rzeczywistą mniejszą od $\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, więc otrzymujemy

$$\mu(A) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i).$$

Pokażemy, że zachodzi także nierówność odwrotna. Jeśli

$$\int_{A_i} f(x)\,d\mu(x) = \infty$$

dla któregokolwiek zbioru A_i to z monotoniczności całki (twierdzenie 34), czyli funkcji μ, wnioskujemy, że

$$\int_{A} f(x)\,d\mu(x) = \infty,$$

skąd zachodzi już równość

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i).$$

Załóżmy więc, że dla każdego i całka jest skończona $\nu(A_i) = \int_{A_i} f(x)\,d\mu(x)$ jest skończona. Niech $\varepsilon > 0$. Niech

$$A_i = \bigcup A_{i,j}$$

będzie rozbiciem zbioru A_i na takie rozłączne zbiory z $\mathcal{F}$, że

$$\sum_{j=1}^{\infty}\inf\{f(x) : x \in A_{i,j}\}\mu(A_{i,j}) + \varepsilon\cdot 2^{-i} > \nu(A_i).$$

Zauważmy tu, że rodzina zbiorów $\{A_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ stanowi rozbicie na przeliczalnie wiele zbiorów z $\mathcal{F}$ zbioru A, a więc z definicji całk mamy

$$\nu(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\inf\{f(x) : x \in A_{i,j}\}\mu(A_{i,j}) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\nu(A_i) - \varepsilon\cdot 2^{-i}) = \sum_{i=1}^{\infty}(\nu(A_i) - \varepsilon.$$

Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy nierówność

$$\nu(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\nu(A_i),$$

która kończy dowód.

$\square$