Szeregi potęgowe

Def. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right),$$
gdzie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, $x \in \mathbb{R}$.

Uwaga. Szereg potęgowy jest zbieżny dla $x=0$. Wtedy jego suma to a_0.
Dla innych x'ów szereg może być zbieżny lub nie.
Jeśli szereg jest zbieżny dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$, to
$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest funkcją $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Przykład. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Tu jak widać $a_n = 1$.

Jest to, po prostu, szereg geometryczny.
Jest on zbieżny dla $|x|<1$.
Wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Dla $|x| \geqslant 1$ jest rozbieżny, bo $\lim_{n\to\infty} x^n \neq 0$.

Przykład. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Tu $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{dla } n=0 \end{cases}$

Aby przetestować dla jakich x ten szereg jest zbieżny zastosujemy kryterium Cauchy'ego.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

Zatem dla $|x|<1$ szereg jest zbieżny, a
dla $|x|>1$ szereg jest rozbieżny.
Pozostały do przetestowania dwa przypadki:

1° $x=1$.

Wtedy mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, czyli szereg harmoniczny. Rozbieżny.

2° $x=-1$

Wtedy mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, który jest zbieżny na mocy twierdzenia o szeregu naprzemiennym ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ jest ciągiem malejącym).

Widzimy zatem, że nasz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny dla $x \in [-1, 1)$.

Tw. (Cauchy'ego - Hadamarda o promieniu zbieżności szeregu)

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie szeregiem potęgowym.

Załóżmy, że $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ lub $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Wtedy $R = \frac{1}{\rho}$ (dla $\rho = \infty$ kładziemy $R=0$
$\rho = 0$ kładziemy $R = \infty$)

i dla $x \in (-R, R)$ szereg jest zbieżny, a
dla $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ szereg jest rozbieżny.

d-d.

Niech $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Zastosujmy do naszego szeregu kryterium Cauchy'ego:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \lambda = \rho \cdot |x|$$

Wiemy, że $\lambda < 1$, to szereg jest zbieżny,
czyli $\rho \cdot |x| < 1$, co jest równoważne
$$|x| < \frac{1}{\rho} = R.$$

Analogicznie część rozbieżna.

Niech teraz $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Tu stosujemy kryterium d'Alamberta:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = \varrho \cdot |x|$$

i mamy analogiczną sytuację jak w przypadku z kryterium Cauchy'ego. $\boxtimes$

Uwaga. • R z twierdzenia nazywane jest promieniem zbieżności szeregu.

• Twierdzenie nie rozstrzyga zbieżności dla $x = R$, $x = -R$ (to trzeba zrobić innymi metodami)

• Twierdzenie można sformułować trochę ogólniej, mianowicie $\varrho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(Wtedy obejmuje np. szeregi, w których parzyste wyrazy są równe 0).

Tw. (o różniczkowaniu szeregu)

Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy dla $x \in (-R, R)$ mamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Uwaga. Powyższe tw. mówi, że w przedziale zbieżności szeregu możemy go różniczkować "wyraz po wyrazie".

Przykład. Spróbujmy policzyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Oznaczmy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Zróżniczkujmy stronami (wykorzystując twierdzenia):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

czyli $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ (oczywiście dla $|x|<1$)

Aby znaleźć $f(x)$ wystarczy policzyć całkę:

$$\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln|1-x| + C$$

Zatem

$$f(x) = -\ln|1-x| + C$$

Wstawiając $x=0$ dostajemy

$$f(0) = 0 = -\ln|1| + C = C$$

czyli ostatecznie $f(x) = -\ln(1-x)$

(wartość bezwzględna zniknęła, bo $|x|<1$).

Def. (Delikatne uogólnienie)

Szeregiem potęgowym o środku w x_0 nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Uwaga. Dla takiego szeregu także wyliczamy promień zbieżności z tw. Cauchy'ego – Hadamarda. Dostajemy stąd, że szereg jest zbieżny dla $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Szeregi Taylora i Maclaurina.

W poprzednim semestrze stosowaliśmy rozwijanie funkcji w szereg Taylora (Maclaurina). Tak, na prawdę, zapisywaliśmy funkcji jako wielomian + reszta (marzyliśmy, aby była "mała")

Teraz możemy pójść krok dalej.

Def. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^{∞}, czyli posiadającą pochodne dowolnego rzędu. $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Szeregiem Taylora nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{przyjmujemy} \\ f^{(0)}(x_0) = f(x_0) \end{array} \right\}$$

- Szeregiem Maclaurina nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (\text{czyli sz. Taylora dla } x_0 = 0)$$

Tw. Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Wtedy dla $x \in (-R+x_0, R+x_0)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Przykład.

$a(x) = \sin x$. Mamy $a^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } 4 \mid n \\ \cos x & \text{dla } 4 \mid n-1 \\ -\sin x & \text{dla } 4 \mid n-2 \\ -\cos x & \text{dla } 4 \mid n-3 \end{cases}$

Zatem

$$a^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 4k \\ 1 & \text{dla } n = 4k+1 \\ 0 & \text{dla } n = 4k+2 \\ -1 & \text{dla } n = 4k+3 \end{cases}$$

Zatem szereg Maclaurina funkcji $\sin x$ ma postać

$$0+\frac{x}{1}+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

czyli $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Tutaj $$\varrho=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[1+2n]{\frac{1}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}=0.$$

czyli $R=\infty$

i nasz szereg jest zbieżny dla $x\in\mathbb{R}$.

Uwaga. Przy znajdowaniu rozwinięć kolejnych funkcji w szereg Maclaurina (Taylora) czasami wygodnie jest stosować tw. o różniczkowaniu.

Przykład.

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\dots$$

Różniczkując dostajemy:

$$\cos x=\frac{1}{1}-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+\frac{9x^8}{9!}-\dots$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots$$

Scanned by TapScanner