Zastosowania całek wielokrotnych

Tw. Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem regularnym oraz $f: D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o ciągłych i ograniczonych pochodnych cząstkowych. Płat powierzchniowy S zdefiniowany jest wzorem

$$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$$

Pole płata powierzchniowego wyraża się wzorem:

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy.$$

Przykład. Mamy sferę o promieniu 2 (środek w początku układu współrzędnych). Policzymy pole wycinka sfery nad kołem o promieniu 1 (i środkiem w początku układu współrzędnych)

Mamy:

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} \qquad D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$|S| = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}\, dx\,dy = \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\, dx\,dy =$$

$$= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dx\,dy$$

Zastosujemy współrzędne biegunowe. Wtedy $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$

W naszym przypadku $r \in [0,1]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$

$\{\Delta = \{(r,\alpha) : r \in [0,1], \alpha \in [0,2\pi]\}\}$. Pamiętamy też o jakobianie

$J = r$!

$$|S| = \iint_\Delta \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2r\,dr}{\sqrt{4-r^2}}\, d\alpha$$

W wewnętrznej całce podstawmy $4-r^2 = t$. Wtedy $-2r\,dr = dt$

t zmienia się od 4 do 3.

$$|S| = \int_0^{2\pi} \int_4^3 \frac{-dt}{\sqrt{t}} \, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left. \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} \right|_4^3 d\alpha =$$

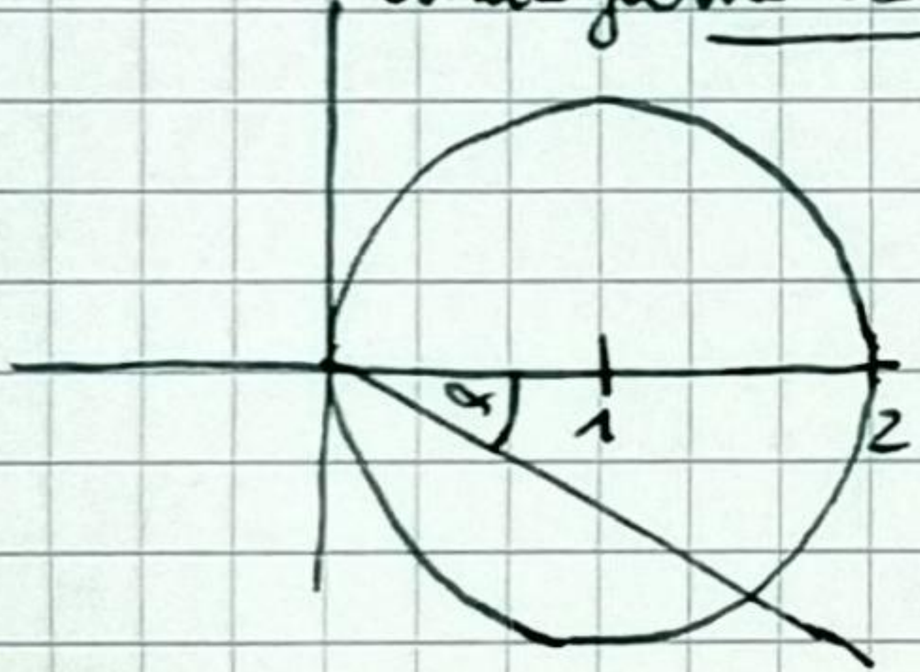
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{4^3}} \right) \right) d\alpha = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \right).$$

Przykład. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez kulę o środku $(0,0,0)$ i promieniu 2 oraz walec o podstawie $D' = \{(x,y): (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$

$$|V| = \iint_{D'} \sqrt{4-x^2-y^2} - -\sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\,dy =$$

$$2\iint_{D'} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\,dy = 2\iint_{\Delta'} \sqrt{4-r^2}\, r\, dr\, d\alpha$$

(rachunki analogiczne do poprzedniego przykładu). Trzeba rozsądnie opisać Δ'



Jasne, że $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

What about r?

Zabierzemy się do tego analitycznie:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$(r\cos\alpha - 1)^2 + (r\sin\alpha)^2 = 1$$

$$r^2\cos^2\alpha - 2r\cos\alpha + 1 + r^2\sin^2\alpha = 1$$

$$r^2 - 2r\cos\alpha = 0$$

$$r(r - 2\cos\alpha) = 0$$

Mamy zatem $\Delta' = \{(r,\alpha) : \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ r \in [0, 2\cos\alpha]\}$

$$|V| = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\alpha} \sqrt{4-r^2}\, r \, dr \, d\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \text{podstawiamy w wewnętrznej całce} \\ 4-r^2 = t \quad \text{tak jak poprzednio} \\ r=0 \rightarrow t=4; \quad r=2\cos\alpha \rightarrow \\ t = 4-(2\cos\alpha)^2 = 4\sin^2\alpha \end{array} \right\}$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{4}^{4\sin^2\alpha} -\frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt \; d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{4\sin^2\alpha}^{4} \sqrt{t}\, dt \, d\alpha =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_{4\sin^2\alpha}^{4} d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3} |\sin\alpha|^3 \right) d\alpha =$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha \, d\alpha = \left| \begin{array}{ll} \cos\alpha = u & \\ -\sin\alpha\, d\alpha = du & \\ \alpha = 0 & u = 1 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} & u = 0 \end{array} \right|$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3} \int_{1}^{0} (1-u^2)\cdot(-1)\, du = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{3}\int_{0}^{1} (1-u^2)\, du =$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{3}\left(u - \frac{u^3}{3} \right)\Big|_{0}^{1} = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

Przykład.

Jak obliczyć $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$?

Uwaga. Jest to tzw. całka niewłaściwa (całkujemy po nieograniczonym zbiorze). Formalnie definiujemy ją następująco:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}dx .$$

Do policzenia naszej całki użyjemy funkcji dwóch zmiennych.

$$e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)dy =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 .$$

Zastosujemy współrzędne biegunowe:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \text{w wewnętrznej całce} \\ -r^2 = t \\ -2rdr = dt \\ t \text{ zmienia się od} \\ 0 \text{ do } -\infty \end{array} \right.$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} -\frac{1}{2}\int\limits_{-0}^{-\infty} e^{t}dt\; d\alpha = \int\limits_{0}^{2\pi} -\frac{1}{2}e^{t}\Big|_{0}^{-\infty} d\alpha =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\left(0+\frac{1}{2}\right)d\alpha = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi .$$

czyli $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Oczywiście, po drodze, były też całki niewłaściwe (granice, na które natrafialiśmy były, na szczęście, skończone :)).