Kontynuujemy rachunki dotyczące $\Phi(t) = f(x_0+ht, y_0+kt)$

$$\Phi''(t) = \left(\Phi'(t)\right)' = \left(h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+ht, y_0+kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+ht, y_0+kt)\right)' =$$

$$= h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+ht, y_0+kt)\right)' + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+ht, y_0+kt)\right)' =$$

$$= h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+ht, y_0+kt) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+ht, y_0+kt)\right) +$$

$$+ k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+ht, y_0+kt) + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+ht, y_0+kt)\right) =$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+ht, y_0+kt) + 2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+ht, y_0+kt) +$$

$$+ k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+ht, y_0+kt).$$

Ogólnie:

$$\Phi^{(n)}(t) = h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0+ht, y_0+kt) + \cancel{k}\binom{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0+ht, y_0+kt) +$$

$$+ \binom{n}{2}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}(x_0+ht, y_0+kt) + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0+ht, y_0+kt) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^{n-i}k^i\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x_0+ht, y_0+kt).$$

(Dowód, nieco pracochłonny kaligraficznie, można przeprowadzić przez indukcję)

Zastosujmy wzór Maclaurina dla funkcji $\Phi(t)$.

Dostaniemy $\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}t + \frac{\Phi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\Phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + R_n$

gdzie $R_n = \frac{\Phi^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n$ dla pewnego $\theta \in (0,1)$.

Rozpiszmy dokładnie wzór dla $n=2$ oraz $t=1$:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k + R_2,$$

gdzie
$$R_2 = \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+h\Theta, y_0+k\Theta) + 2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+h\Theta, y_0+k\Theta) + \right.$$
$$\left. + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+k\Theta, y_0+k\Theta)\right).$$

Ekstrema lokalne

Def. • Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne jeśli $(\exists \delta > 0)(\forall k, h)(k^2 + h^2 < \delta^2 \to f(x_0, y_0) \geq f(x_0+h, y_0+k))$, czyli istnieje (małe) otoczenie punktu (x_0, y_0), na którym $f(x_0, y_0)$ jest największą wartością funkcji.

• Analogicznie definiujemy minimum $\{f(x_0, y_0) \leq f(x_0+h, y_0+k)\}$

• Mówimy, że f ma ekstremum jeśli ma minimum lub maksimum w (x_0, y_0).

Warunek konieczny istnienia ekstremum.

Jeśli $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe oraz ekstremum w (x_0, y_0), to $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Dla $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0) = 0$

(Analogicznie w wyższych wymiarach.)

Def. Hesjanem nazywamy macierz pochodnych cząstkowych rzędu 2.

Dla $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

wartości tych pochodnych liczymy w (x_0, y_0)

[Dla ciągłych pochodnych 2-giego rzędu mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
]

Dla $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Warunek wystarczający na istnienie ekstremum.

Przypadek $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zakładamy, że f ma ciągłe pochodne cząstkowe 2-giego rzędu oraz $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Korzystamy z wzoru Taylora (koniec pierwszej strony):

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + R_2,$$

gdzie $R_2 = \frac{1}{2!}\left(h^2 f_{xx} + 2kh f_{xy} + k^2 f_{yy}\right)$

dla zwartości zapisu
$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + h\theta, y_0 + k\theta)$
....

Uwaga kluczowa! Jeśli $R_2 \geq 0$ dla dowolnych dostatecznie małych k, h, to w $f(x_0, y_0)$ jest ~~maksimum~~ minimum, jeśli $R_2 \leq 0$, to maksimum.

$$R_2 = \frac{1}{2f_{xx}}\left(h^2 f_{xx}^2 + 2kh f_{xy} f_{xx} + k^2 f_{xy}^2\right) - \frac{1}{2f_{xx}} k^2 f_{xy}^2 + \frac{1}{2} k^2 f_{yy} =$$

$$= \frac{1}{2f_{xx}}\left(\underbrace{(h f_{xx} + k f_{xy})^2}_{\geq 0} + \underbrace{k^2}_{\geq 0}(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)\right)$$

Jeśli $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$, to cały nawias > 0 i znak R_2 zależy od znaku f_{xx}. (Zakładaliśmy milcząco, że $f_{xx} > 0$)

Teraz korzystamy z ciągłości pochodnych 2-giego rzędu i dostajemy

Tw. Zał. że $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne 2-giego rzędu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$ Niech ponadto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0 \qquad (*)$$

Wtedy:

Jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, to f ma ~~maksimum~~ minimum lokalne w (x_0,y_0).

Jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) < 0$, to f ma ~~minimum~~ maksimum lokalne w (x_0,y_0).

Uwaga. Jeśli w $(*)$ dostajemy < 0, to brak ekstremum.
Jeśli $= 0$, to nic nie wiadomo ($f_1(x,y) = x^3+y^3$; $f_2(x,y) = x^6+y^4$)

Uwaga. Prawa strona $(*)$ to wyznacznik Hesjanu!
Przypadek? Nie sądzę!

Analogiczne tw. dla $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$.
Badamy Hesjan H w punkcie (x_0,y_0,z_0).
Jeśli macierz H jest dodatnio określona, to mamy minimum lokalne; jeśli ujemnie, to maksimum.

Do sprawdzenia, ~~że~~ czy macierz jest dodatnio (ujemnie) określona służy kryterium Sylvestera.
Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Liczymy wyznaczniki minorów

$M_1 = \det[a_{11}] = a_{11}$

$$M_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$M_3 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$M_n = \det A$.

- Jeśli $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$, ..., $M_n > 0$, to macierz dodatnio określona. (same +)
- Jeśli $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$, $M_4 > 0$, ..., to macierz ujemnie określona (na przemian $-, +, -, +, \dots$)

Ma to związek z formami kwadratowymi (patrz Algebra). Namiastkę tych form przeżywaliśmy analizując $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Uwaga. To co wyprowadziliśmy dla $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zgadza się z ogólnym przypadkiem. (Oczywiście!)

Scanned by TapScanner