Zastosowania całek wielokrotnych, c.d.

Moment bezwładności

Def. Niech m_i $i=1,2,\dots,m$ będą masami (punktowymi) odległymi od α o r_i $i=1,2,\dots,m$ [α jest tu punktem, prostą lub płaszczyzną]. Moment bezwładności tego układu względem α to

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 m_i .$$

Fakt. Niech V będzie bryłą ($\subseteq \mathbb{R}^3$) o gęstości zadanej funkcją $\varrho : V \to \mathbb{R}^+$. Momenty bezwładności tej bryły wyrażają się wzorami:

$$B_{xy} = \iiint_V z^2 \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{(względem płaszczyzny } xy)$$

$$B_z = \iiint_V (x^2+y^2)\, \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{(względem osi } Oz)$$

$$B_O = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{(względem początku układu współrzędnych } O=(0,0,0))$$

Przykład.

Obliczmy momenty bezwładności walca o podstawie koła w środku $(0,0)$ i promieniu 1 oraz wysokości 1.

$W = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 \le 1 \ \wedge \ z \in [0,1] \}$

Niech $\varrho(x,y,z) = |x|$.

$$B_{xy} = \iiint_W z^2 |x| \,dx\,dy\,dz = (g^{o})$$

Scanned by TapScanner

Zastosujmy współrzędne walcowe (naturalnie)

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \end{cases} \qquad J = r$$

$$(\circledast) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 |r\cos\alpha| r \, dr \, d\alpha \, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} z^2 |\cos\alpha| \Big|_{r=0}^{r=1} d\alpha \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} z^2 |\cos\alpha| \, d\alpha \, dz =$$

$$= \int_0^1 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} z^2 \cos\alpha \, d\alpha \, dz = \int_0^1 \frac{2}{3} z^2 \sin\alpha \Big|_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} dz =$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{3} z^2 \, dz = \frac{4}{3} \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{9}.$$

Podobnie liczymy B_2:

$$B_2 = \iiint_W (x^2+y^2)|x| \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 |r\cos\alpha| r \, dr \, d\alpha \, dz =$$

$$= \left(\int_0^1 dz\right)\left(\int_0^{2\pi} |\cos\alpha| \, d\alpha\right)\left(\int_0^1 r^4 \, dr\right) = 1 \cdot 4 \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

Analogicznie B_0:

$$B_0 = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)|x| \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2+z^2)|r\cos\alpha| r \, dr \, d\alpha \, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^4|\cos\alpha| + r^2 z^2 |\cos\alpha|\right) dr \, d\alpha \, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}|\cos\alpha| + \frac{r^3}{3} z^2 |\cos\alpha| \Big|_{r=0}^{r=1} d\alpha \, dz =$$

Scanned by TapScanner

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}z^2\right) \int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha\, dz = \int_0^1 4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}z^2\right) dz =$$

$$= \left(\frac{4}{5}z + \frac{1}{9}z^3\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{9}.$$

Środek ciężkości

Def. Mamy n mas m_i $i = 1, 2, \dots, n$ rozmieszczonych w punktach (x_i, y_i, z_i) $i = 1, 2, \dots, n$. Środkiem ciężkości układu tych mas nazywamy punkt o współrzędnych $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, gdzie

$$\hat{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad \hat{y} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \quad \hat{z} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} z_i m_i$$

$\left(M = \sum_{i=1}^{n} m_i\right.$, czyli jest to masa całego układu$\left.\right)$

Fakt. Niech V będzie bryłą ($\subseteq \mathbb{R}^3$) o gęstości zadanej funkcją $\rho: V \to \mathbb{R}_+$. Środek ciężkości tej bryły to punkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, gdzie

$$\hat{x} = \frac{1}{M}\iiint_V x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\hat{y} = \frac{1}{M}\iiint_V y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\hat{z} = \frac{1}{M}\iiint_V z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

M - oznacza tu masę bryły, czyli $M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Przykład.

Zajmijmy się masą bryły W z poprzedniego przykładu.

$$M = \iiint\limits_W |x|\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 |r\cos\alpha|\, r \, dr\, d\alpha\, dz =$$

$$= \left(\int_0^1 dz\right)\left(\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha\right)\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) = 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{M} \iiint\limits_W x|x|\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\cos\alpha\, |r\cos\alpha|\, r\, dr\, d\alpha\, dz =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\int_0^1 dz\right)\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\alpha\, |\cos\alpha|\, d\alpha\right)}_{=0 \text{ (do sprawdzenia jako ćwiczenie)}}\left(\int_0^1 r^3\, dr\right) = 0$$

Podobnie $\hat{y} = 0$.

$$\hat{z} = \frac{1}{M} \iiint\limits_W z|x|\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z\,|r\cos\alpha|\, r\, dr\, d\alpha\, dz =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\int_0^1 z\, dz\right)\left(\int_0^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha\right)\left(\int_0^1 r^2\, dr\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie, współrzędne środka ciężkości bryły W, to $(0, 0, \frac{1}{2})$. (czyli w zgodzie z zdrowym rozsądkiem :)).