# Równania różniczkowe

**Def.** Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci
$$F(x, y, y') = 0,$$
gdzie $F$ jest funkcją trzech zmiennych.

**Uwaga.** W praktyce często rozważamy szczególną postać równania
$$y' = f(x,y).$$

**Def.** Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja $y = y(x)$, dla której $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

**Przykład.**
Równanie $y = y' + 2\sin x$
ma rozwiązanie
$$y(x) = \sin x + \cos x.$$

W istocie $y'(x) = \cos x - \sin x$

Zatem
$$y'(x) + 2\sin x = \cos x - \sin x + 2\sin x = \cos x + \sin x = y(x).$$

**Def.** Zagadnieniem początkowym nazywamy
$$\begin{cases} y' = f(y, x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad *$$
[Tu $x_0, y_0$ to stałe rzeczywiste]
Drugi człon $*$ nazywany jest warunkiem początkowym

Def. Równaniem o rozdzielonych zmiennych nazywamy równanie postaci

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

gdzie $f, g$ są funkcjami ciągłymi.

Przykład. Załóżmy, że $g(y) = 1$. Wtedy równanie przyjmuje postać $y' = f(x)$.
Znalezienie rozwiązania równania sprowadza się do znalezienia całki $\int f(x)dx$.

Co więcej, na mocy wniosku z tw. Lagrange'a pewna całka stanowi klasę (wszystkich) rozwiązań równania.

Przykład konkretny:

$$\begin{cases} y' = x^2 + e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Mamy $y(x) = \int (x^2 + e^x)\, dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$

Podstawiając warunek początkowy:

$$1 = y(0) = \frac{0^3}{3} + e^0 + C = 1 + C$$

dostajemy $C = 0$,

czyli rozwiązaniem naszego zagadnienia początkowego jest

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + e^x.$$

Rozwiązywanie równań o rozdzielonych zmiennych

$$y' = f(x)\, g(y) \qquad (R)$$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Całkując obie strony (względem zmiennej $x$; $y, g(y), y'$ są w końcu funkcjami $x$'a) dostajemy:

$$\int \frac{y'}{g(y)}\,dx = \int f(x)\,dx$$

Podstawiając po lewej stronie
$$\left\{\begin{array}{l} y = y(x) \\ y' = y'(x) \\ dy = y'(x)\,dx \end{array}\right\}$$
otrzymujemy:

$$\int \frac{y'}{g(y)}\,dx = \int \frac{y'(x)\,dx}{g(y(x))} = \int \frac{1}{g(y)}\,dy .$$

Widzimy zatem, że rozwiązanie naszego równania sprowadza się do obliczenia dwóch całek i "odwikłania" funkcji $y=y(x)$.

Metoda "inżynierska" (nieładna, choć poprawna na mocy wcześniejszych rozważań)

Zapisujemy $y' = \frac{dy}{dx}$.

Wtedy $\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Przenosimy $dx$, dopisujemy $\int$ i jest :).

Przykład:

$$y' = \frac{x+1}{y} \qquad y(0)=2$$

Mamy $yy' = x+1$, czyli

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

Stąd $\frac{y^2}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} + C$,

czyli $y^2 = (x+1)^2 + C'$

Uwzględniając warunek początkowy:

$$y(0) = 2^2 = (0+1)^2 + C'$$
$$4 = 1 + C'$$
$$C' = 3,$$

czyli
$$y = \pm\sqrt{(x+1)^2+3}.$$
$-$ odrzucamy, bo $y(0)=2$ (a nie $-2$).

Ostatecznie:
$$y(x) = \sqrt{(x+1)^2+3}.$$

Sprawdzimy
$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^2+3}} \cdot 2(x+1) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \frac{x+1}{y(x)}.$$

Sukces!

Równania liniowe

Def. Liniowym równaniem I rzędu nazywamy równanie postaci:
$$y' + p(x)y = q(x)$$
Jeśli $q(x) \equiv 0$, to równanie nazywamy jednorodnym.
$$\left[\ y' + p(x)y = 0.\ \right]$$

Uwaga. Jednorodne równanie liniowe, to szczególny przypadek równania o rozdzielonych zmiennych, a to już umiemy rozwiązać.

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (J)$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx$$

$$\ln y = -\int p(x)\,dx = -P(x) + C$$

[$P(x)$ to tylko pomocnicze oznaczenie.]

5.

Zatem
$$y = e^{-P(x)+C} = e^{-P(x)} \cdot e^{C}$$
Kładąc $D = e^{C}$ dostajemy
$$y = D e^{-P(x)}.$$

Metoda "uzmienniania" stałej.

Niech teraz $D = D(x)$ będzie funkcją.
Zajmijmy się przypadkiem niejednorodnym
$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (N)$$

Niech $y = D e^{-P(x)}$.
Wtedy
$$y' = D' e^{-P(x)} + D e^{-P(x)}(-P'(x)) =$$
$$= D' e^{-P(x)} + D e^{P(x)}(-p(x)) =$$
$$= D' e^{-P(x)} + y(-p(x)) = D' e^{-P(x)} \cancel{+} - p(x)y.$$

Zatem (N) przyjmuje postać:
$$D' e^{-P(x)} - p(x)y + p(x)y = q(x)$$
$$D' e^{-P(x)} = q(x)$$
czyli
$$D = \int \frac{q(x)}{e^{-P(x)}}\,dx = \int q(x)\, e^{P(x)}\,dx.$$

Przykład.
$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x^3 & (☼) \\ y(1) = 1 & (♡) \end{cases}$$
Zaczynamy od jednorodnego $y' - \frac{y}{x} = 0$, czyli
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$
Zatem $\ln y = \ln x + C$, czyli $y = Dx$
Uzmienniamy $D$: $y' = D'x + D$
☼ przyjmuje postać $D'x = x^3$, czyli $D' = x^2$.

Stąd $D = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + E$

Nasze rozwiązanie to $y = Dx = \left(\frac{x^3}{3} + E\right)x = \frac{x^4}{3} + Ex$

Uwzględniając warunek początkowy (*):

$$1 = y(1) = \frac{1}{3} + E \cdot 1$$

czyli $E = \frac{2}{3}$

Ostatecznie: $y = \frac{x^4}{3} + \frac{2}{3}x$.

Sprawdzimy

$$y' = \frac{4x^3}{3} + \frac{2}{3}$$

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{4x^3}{3} + \frac{2}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} = x^3$$