Ekstrema warunkowe, mnożniki Lagrange'a

Def. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Funkcja f ma w punkcie (x_0,y_0) maksimum [minimum] lokalne pod warunkiem $g(x,y)=0$ jeśli

- $g(x_0,y_0)=0$
- $\exists \delta>0 \ \forall x',y' \quad g(x',y')=0 \wedge d((x',y'),(x_0,y_0))<\delta$

$$\longrightarrow \quad g(x',y') \leq g(x_0,y_0)$$
$$[\, g(x',y') \geq g(x_0,y_0) \,]$$

Szukamy zatem punktu (x_0,y_0), który "spełnia warunek" $g(x_0,y_0)=0$ oraz w jego otoczeniu punkty spełniające warunek $g(x',y')=0$ mają mniejszą [mniejszą] wartość funkcji f.

Przykład.
$f(x,y)=x^4+y^2$
$g(x,y)=x^2+y^2-1$
Szukamy więc ekstremalnych wartości funkcji f na okręgu jednostkowym.
Warunek $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ możemy zapisać
$y=\pm\sqrt{1-x^2} \quad x\in[-1,1]$.
Wpisując to do funkcji f dostajemy
$F(x)=x^4+(1-x^2) \qquad \text{dla } x\in[-1,1]$.
Sprowadziliśmy więc wyjściowe zagadnienie do szukania ekstremów funkcji jednej zmiennej.

Wykorzystamy tę intuicję w ogólnym przypadku.

Będziemy zakładać, że funkcje f, g mają (przynajmniej drugie) pochodne cząstkowe.

Tak jak w przykładzie "pomyślmy", że y jest funkcją x (przynajmniej lokalnie) $y = y(x)$.

Chcemy, aby $F'(x) = 0$, gdzie $F(x) = f(x, y(x))$

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) \qquad \left\{ \text{rachunki jak przy wzorze Taylora} \right\}$$

Użyjmy warunku $g(x, y(x)) = 0$

$$0 = \frac{d}{dx} g(x, y(x)) = \frac{\partial g}{\partial x} g(x, y(x)) + \frac{\partial g}{\partial y} g(x, y(x)) \cdot y'(x)$$

Stąd $$y'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x))}$$

Wstawiamy do $F'(x) = 0$ i dostajemy (po pomnożeniu przez $\frac{\partial g}{\partial y}(\ldots)$)

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x))$$

Oznaczając $\cancel{\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))}} = \lambda$ otrzymujemy

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x))}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 & \{ \text{bo tak} \} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 & \{ \text{z rachunku} \} \\ g(x,y) = 0 & \{ \text{nasz warunek} \} \end{cases}$$

Uwaga. To to samo jakby szukać ekstremów funkcji $\Phi(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y))$.

Uwaga. Można kontynuować rachunki (wyliczyć F''), aby przekonać się, czy mamy minimum / maksimum lokalne.
(Jesteśmy leniwi (rachunki nie są zbyt przyjemne), więc z reguły tego nie robimy. Zwłaszcza jeśli interesuje nas największa / najmniejsza wartość przy zadanym warunku – wystarczy wtedy wyliczyć wartość w "podejrzanych punktach")

Przykład (ten co był naszą technologią)

$f(x,y) = x^4 + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$

Dostajemy układ równań

$$\begin{cases} 4x^3 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Z (2) $y = 0$ lub $\lambda = 1$

Tu używając (3) dostajemy "podejrzane" punkty $(1,0) = P_1$ $(-1,0) = P_2$

Wstawiając $\lambda = -1$ do (1) mamy

$4x^3 - 2x = 0$

$2x(2x^2 - 1) = 0$

Stąd $x = 0$ i mamy kolejne "podejrzane" punkty $P_3 = (0,1)$, $P_4 = (0,-1)$.

Lub $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad P_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad P_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad P_7 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad P_8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Jaka jest zatem najmniejsza największa wartość f przy zadanym warunku g?

Mnogość podejrzanych punktów sprowadza się do 3 przypadków:

$x^2=1,\ y^2=0;$ $\quad$ $x^2=0;\ y^2=1;$ $\quad$ $y^2=x^2=\frac{1}{2}$

$f(x,y)=1^2+0$ $\quad$ $f(x,y)=0^2+1$ $\quad$ $f(x,y)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

czyli ~~min~~ najmniejsza wartość to $\frac{3}{4}$, a największa to 1.

Uwaga. "Normalnie", czyli metodą z początku wykładu szybciej doszlibyśmy do prawdy!

Ale! Nie zawsze łatwo jawnie zapisać y jako funkcję x!

Uwaga. Analogiczna metoda "działa" dla $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ przy warunkach

$g_1, g_2, \dots, g_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad k<n$

Pojawiają się wtedy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (nazywane mnożnikami Lagrange). Szukamy wówczas ekstremów

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_k).$$

Całki wielokrotne.

Całka podwójna z funkcji $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ po prostokącie $P=[a,b]\times[c,d]$.

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$$

Formalna definicja jest analogiczna do $\int_a^b f(x)\,dx$, czyli dzielimy prostokąt P na mniejsze prostokąty. Przy ich pomocy tworzymy sumy górne i dolne. Jeśli (niezależnie od sposobu podziału) przy średnicy podziału dążącej do 0

~~całka~~ górna i dolna dążą do tej samej liczby, to ową
suma
liczbę nazywamy całką $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$ (a funkcję f całkowalną)

Tw. Funkcje ciągłe są całkowalne.
d-d. (analogiczny jak w przypadku jednowymiarowym) $\boxtimes$

Całki iterowane.
Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie ciągła.
Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $g(y) = f(x,y)$ jest ciągła.
Można zatem policzyć $\int_c^d g(y)\,dy$

Funkcja $h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ jest ciągła.

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \overset{\text{'''}}{?}$$

Możemy też całą operację przeprowadzić w innej kolejności

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \widehat{?}$$

Następne twierdzenie to kluczowa Eureka!

Tw. $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \overset{\text{'''}}{?} = \widehat{?}$ dla $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ciągłej
$P = [a,b] \times [c,d]$.

d-d. (idea)
Wybieramy ciąg podziałów prostokąta P "w kratkę".
Sumując najpierw kolumny potem wiersze dostajemy
przybliżenie $\overset{\text{'''}}{?}$; a wiersze, kolumny $\widehat{?}$ $\boxtimes$