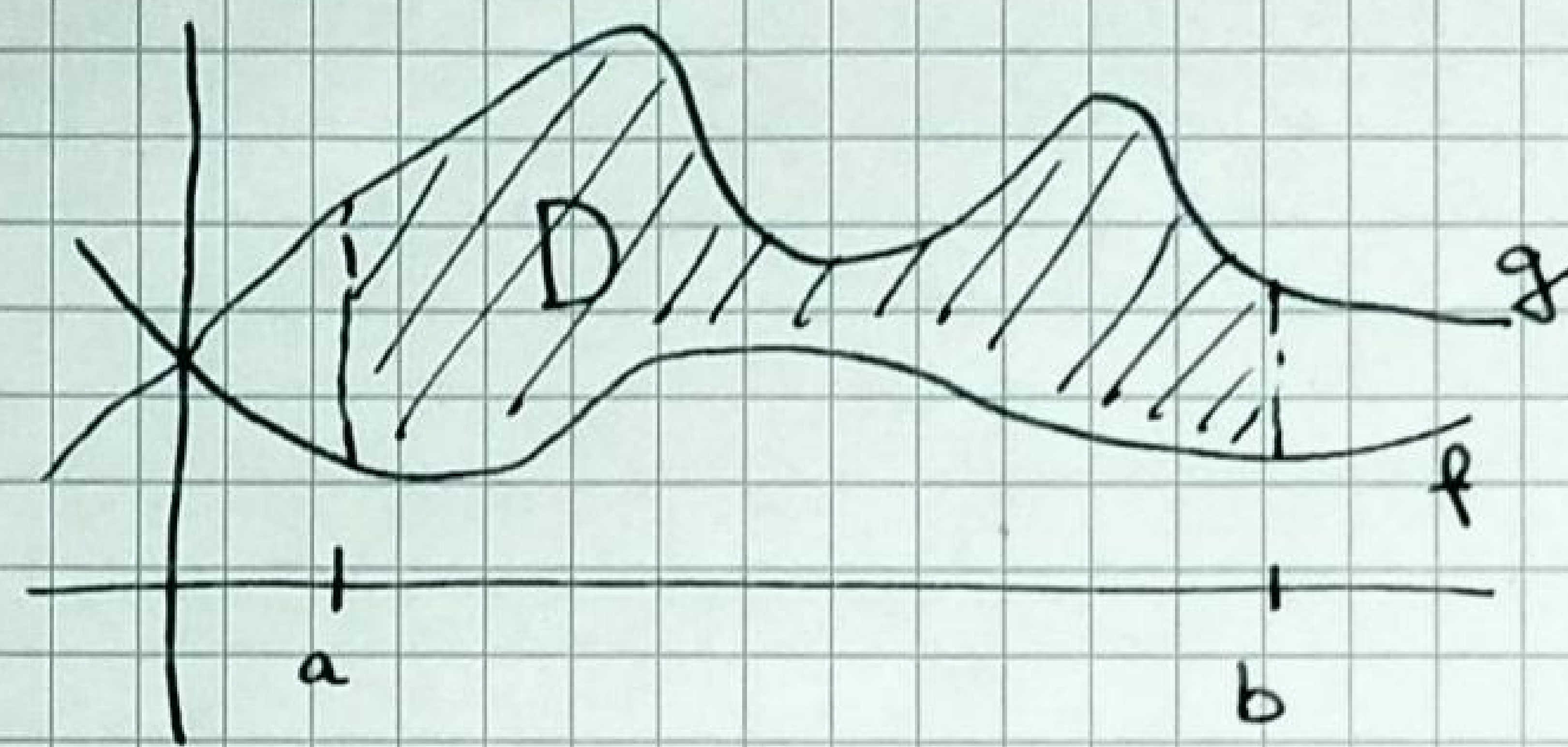
Obszary normalne, obszary regularne

Def. Zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy obszarem normalnym względem x jeśli
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
dla pewnych stałych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz funkcji ciągłych $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

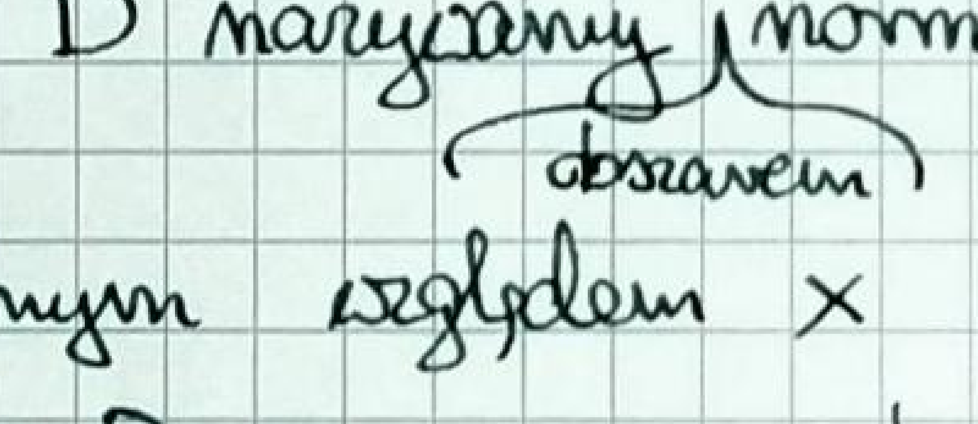


Analogicznie definiujemy obszar normalny względem y, tj.
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \ \wedge \ h(y) \leq x \leq j(y)\}$$
(dla pewnych stałych c, d oraz funkcji ciągłych $h, j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Def. • Zbiór D nazywamy obszarem normalnym jeśli D jest obszarem normalnym względem x lub y

• Zbiór D nazywamy obszarem regularnym jeśli
$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$$
dla pewnych obszarów normalnych $D_1, \ldots, D_k$ $(k \in \mathbb{N})$ o rozłącznych wnętrzach.

Przykład.
Ryba



jest obszarem normalnym względem x. Względem y można ją podzielić na dwa obszary (osobno ogon i osobno reszta) normalne.

Uwaga. Analogiczne definicje obowiązują dla $D \subseteq \mathbb{R}^3$ i ogólnie dla $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

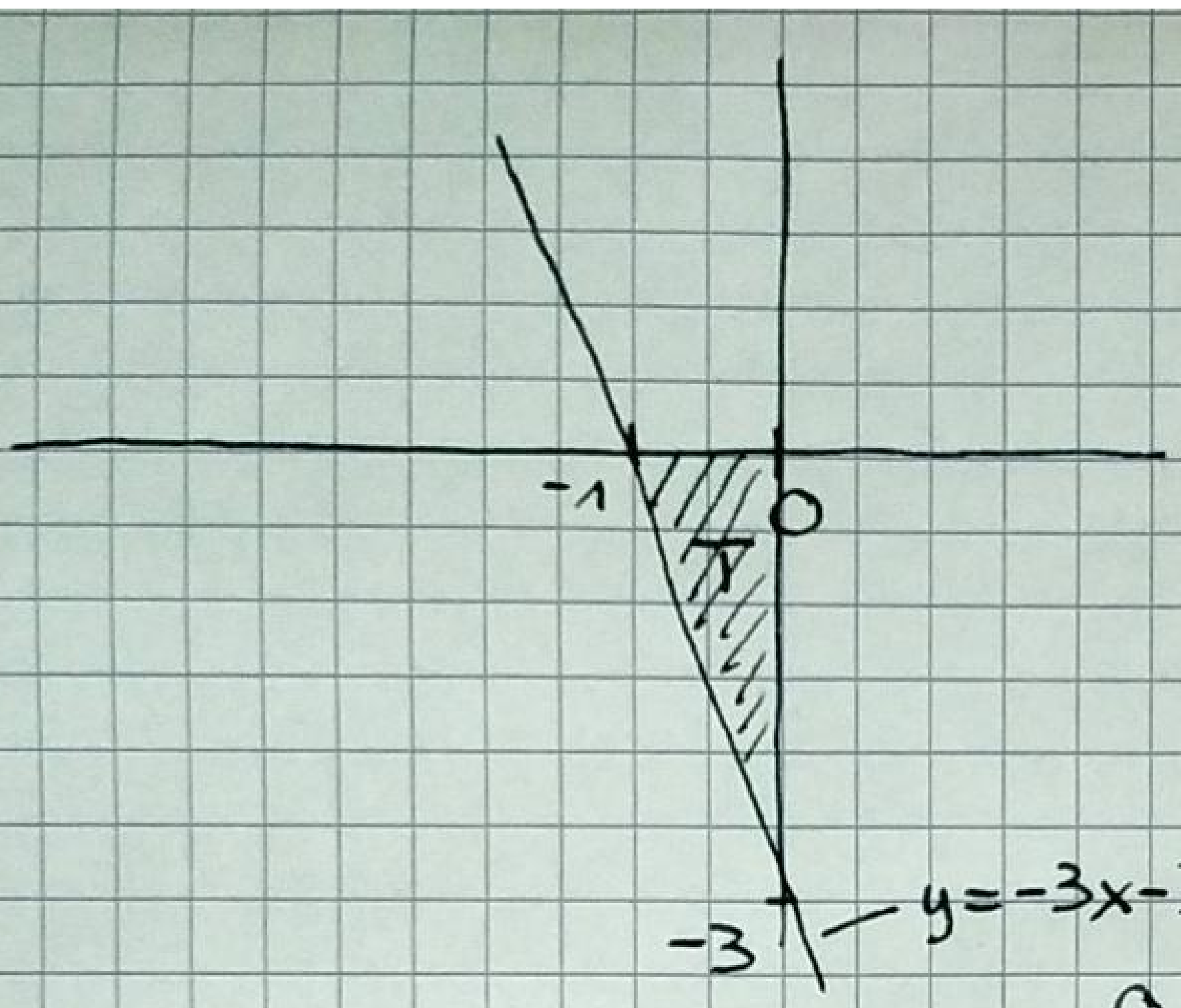
Całka podwójna po obszarze normalnym względem x.

Tw. (Fubiniego) Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie normalny względem x, tj:
$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$.
Niech $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła.
Wtedy
$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x,y)\,dy \right) dx$$

Uwaga. Analogiczny wzór obowiązuje dla obszaru normalnego względem y $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d \wedge h(y) \leq x \leq j(y)\}$
Mamy wtedy:
$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dx = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{j(y)} F(x,y)\,dx \right) dy$$

Uwaga. Jeśli D jest obszarem regularnym $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$, gdzie $D_1, D_2, \ldots, D_k$ normalne, to
$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} F(x,y)\,dx\,dy + \ldots + \iint_{D_k} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Przykład.
Niech T będzie trójkątem ograniczonym przez osie układu współrzędnych i prostą $y = -3x - 3$.
Obliczmy
$$\iint_T (x^2 y - xy^2)\,dx\,dy.$$



$T=\{(x,y):\ -1\leq x\leq 0 \wedge -3x-3\leq y\leq 0\}$

(normalność T względem x)

$T=\{(x,y):\ -3\leq y\leq 0 \wedge -\frac{1}{3}y-1\leq x\leq 0\}$

(normalność względem y)

$$\iint_T (x^2y-xy^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-3x-3}^{0}(x^2y-xy^2)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2y^2}{2}-\frac{xy^3}{3}\Bigg|_{y=-3x-3}^{y=0}\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(0-\left(\frac{x^2(-3x-3)^2}{2}-x\frac{(-3x-3)^3}{3}\right)\right)dx=$$

$$= \int_{-1}^{0} -\frac{9}{2}x^4-9x^3-\frac{9}{2}x^2+9(x^4+3x^3+3x^2+x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{9}{2}x^4+18x^3+\frac{45}{2}x^2+9x\right)dx = \frac{9}{2}\frac{x^5}{5}+\frac{18x^4}{4}+\frac{45x^3}{2\cdot 3}+\frac{9x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$= 0-\left(-\frac{9}{10}+\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+\frac{9}{2}\right).$$

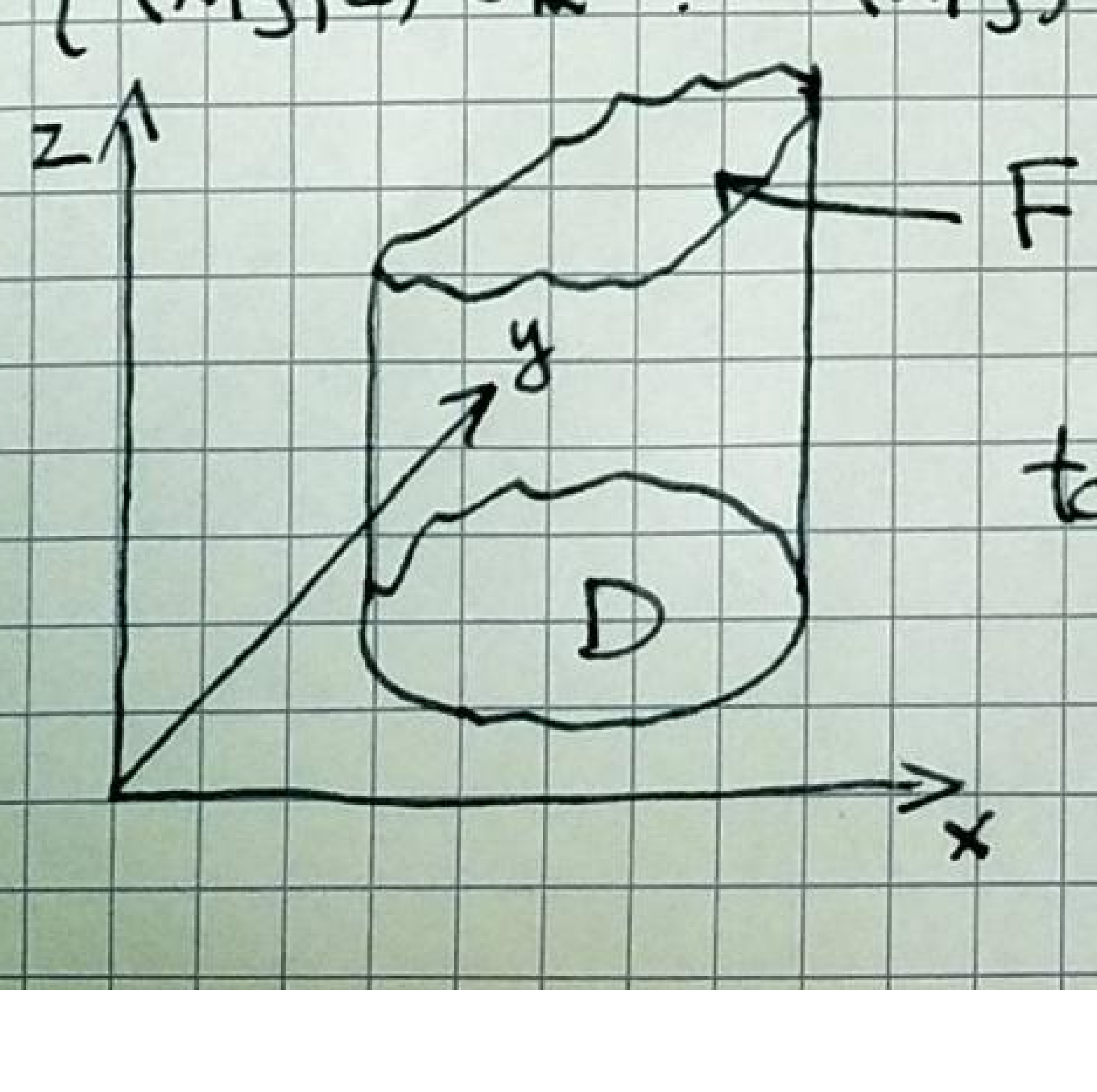
Zachęcam do rachunków używających normalności T względem y.

Wynik, rzecz jasna, będzie taki sam.

Naturalne zastosowanie całki podwójnej.

Niech A będzie bryłą określoną wzorem

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in D \wedge 0\leq z\leq F(x,y)\}$$



to jest A!

gdzie $D\subseteq\mathbb{R}^2$ jest obszarem normalnym

Objętość bryły A wyrażona jest wzorem

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy$$

dla $A = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \wedge G(x,y) \leq z \leq F(x,y)\}$
objętość to

$$\iint_D \left(F(x,y) - G(x,y)\right) dx\,dy$$

Możemy też wyrazić to nieco ogólniej (używając całki potrójnej)
Wtedy dla regularnej bryły $A \subseteq \mathbb{R}^3$ objętość to

$$\iiint_A 1\,dx\,dy\,dz$$

[Analogiczny wzór ma zastosowanie przy liczeniu pola $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Owe pole to

$$\iint_D 1\,dx\,dy$$

]

Całkę potrójną możemy też wykorzystać do liczenia masy bryły regularnej $A \subseteq \mathbb{R}^3$, której gęstość jest określona przez funkcję $\rho : A \to \mathbb{R}$. Owa masa to:

$$\iiint_A \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Zauważmy, że dla jednorodnej bryły $(\rho(x,y,z) = 1)$ dostajemy, zgodnie z oczekiwaniem, objętość.

Uwaga. W praktyce obszary po których całkujemy są normalne względem obu współrzędnych. Bardziej naturalne wydaje się wzięcie normalności względem x. Niekiedy prowadzi to do skomplikowanych, a nawet niemożliwych do wyliczenia, całek. Warto wtedy spróbować drugiej drogi (normalności względem y). Czasami daje to zaskakująco dobre rezultaty :)

Scanned by TapScanner