Granica funkcji (wielu zmiennych)

Definicja jest analogiczna jak w przypadku funkcji jednej zmiennej

Def. Niech $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $\quad \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.

$\lim\limits_{\bar{t} \to \bar{x}} f(\bar{t}) = \bar{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

dla dowolnego ciągu $(\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\left[\bar{a}_n = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_m^n) \right.$ czyli $\left. \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m \right]$

spełniającego warunek

$\lim\limits_{n \to \infty} \bar{a}_n = \bar{x}$ (czyli $\forall i$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_i^n = x_i$) oraz $\bar{a}_n \neq \bar{x}$

mamy $\lim\limits_{n \to \infty} f(\bar{a}_n) = \bar{y}$.

Przepiszmy tę definicję dla przypadku $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = z_0 \iff$

dla każdego ciągu $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t. że $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = y_0$, $(a_n, b_n) \neq (x_0, y_0)$

mamy $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n, b_n) = z_0$.

Przykład (trywialny)

$$\lim_{(x,y,z) \to (0,1,2)} x^3 + yz = 0 + 1 \cdot 2.$$

Wynika to ze "zwykłej" arytmetyki granic:

jeśli $\lim\limits_n a_n = 0$, $\lim\limits_n b_n = 1$, $\lim\limits_n c_n = 2$, to

$$\lim_n \left(a_n^3 + b_n c_n \right) = \left(\lim_n a_n \right)^3 + \left(\lim_n b_n \right) \left(\lim_n c_n \right).$$

Przykład (ciekawszy)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} = ?$$

Mamy:

$$\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y|\cdot|xy|}{|x^2+y^2|} \overset{☼}{\leq} \frac{|x+y|}{|x^2+y^2|}\cdot\frac{1}{2}|x^2+y^2| = \frac{|x+y|}{2}$$

Oczywiście $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{2} = 0$

a zatem $? = 0$.

Nierówność ☼ :

$$(x+y)^2 \geq 0 \qquad x^2+y^2 \geq -2xy$$
$$(x-y)^2 \geq 0 \qquad x^2+y^2 \geq 2xy$$

czyli $-(x^2+y^2) \leq 2xy \leq x^2+y^2$. □

Przykład (brak granicy)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ nie istnieje.

Aby to wykazać wystarczy znaleźć odpowiednie dwa ciągi zbieżne do $(0,0)$.

Połóżmy $(a_n, b_n) = (0, \frac{1}{n})$. [Tutaj $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$]

Wtedy $$\lim_{n\to\infty} f(a_n,b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0\cdot\frac{1}{n}}{0+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Weźmy teraz $(a_n', b_n') = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

Wtedy $$\lim_{n\to\infty} f(a_n', b_n') = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$0 \neq \frac{1}{2}$ więc granica nie istnieje.

Funkcje ciągłe.

Def. Funkcja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła w punkcie $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ($\overline{x}_0$ jest elementem dziedziny funkcji) jeśli

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0).$$

Def. Funkcja $f: A \to \mathbb{R}^k$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym $\overline{x}_0 \in A$ (czyli w każdym punkcie swojej dziedziny).

Przykłady:

$f(x,y,z) = \sin x$

$f(x,y,z) = y^7$

$f(x,y) = x+y$

$f(x,y) = x \cdot y$

$f(x,y,z) = \frac{y}{z}$.

Tw. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, czyli

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $\quad g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ ciągłe, to

$g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ ciągła $\quad [g \circ f(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))]$

Przykład. $f(x,y) = (x+y, x^7+5)$

$g(x,y) = \frac{x}{y}$

Wtedy $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g(x+y, x^7+5) = \frac{x+y}{x^7+5}$$

Tu oczywiście dziedzina g to $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ co naturalnie wpływa na dziedzinę funkcji $g \circ f$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^7+5 \neq 0\}$.

Pochodne cząstkowe.

Z uwagi na prostotę zapisu rozważymy najpierw $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Def. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Przykład.

$f(x,y) = x^3y^4 + \sin x \qquad (x_0,y_0)=(3,1)$

Niech $g(x) = f(x,y_0) = f(x,1) = x^3+\sin x$

Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = g'(x_0)$$ [Po prawej "zwykła" pochodna f-cji jednej zmiennej]

Czyli $$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 3\cdot 2^2 + \cos 3.$$

Analogicznie $h(y) = f(x_0,y) = 3^3y^4 + \sin 3$

i $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = h'(y_0)$$

Tu $h'(y) = 3^3\cdot 4y^3$, czyli $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 3^3\cdot 4$.

Definicja ogólna jest analogiczna do "dwuwymiarowej".
Zauważmy, że $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ możemy zapisać jako
$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k) \quad \text{gdzie} \quad f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
i wtedy definiujemy $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ w naturalny sposób.

Przykład.

$f(x,y) = \sin(x^3 + x\ln y)$. Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[\cos(x^3+x\ln y)\right]\cdot(3x^2+\ln y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left[\cos(x^3 + x\ln y)\right]\cdot\left(x\cdot\frac{1}{y}\right).$$

W przypadku różniczkowania "po x" o y-ach myślimy jak o stałych, a gdy różniczkujemy "po y" na odwrót, czyli zabawa sprowadza się do policzenia "zwykłej" pochodnej.

Pochodne wyższych rzędów.

Def. Niech $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0,z_0)\right) \quad \text{analogicznie dla } y, z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0,z_0)\right) \quad \text{analogicznie dla pozostałych par}$$

Uwaga. Stosujemy konwencję: operator "bliżej" f jest wykonywany wcześniej.

Przykład.

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\cdot\cos z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot\cos z\right) = 2e^{x^2+y^2}\cdot\cos z + 2x\cdot 2x\cdot e^{x^2+y^2}\cos z.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}(-\sin z)\right) = -2x\, e^{x^2+y^2}\sin z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f = \frac{\partial}{\partial z}\left(2x\, e^{x^2+y^2}\cos z\right) = -2x\, e^{x^2+y^2}\sin z$$

Pochodne mieszane (niezależnie od kolejności ich liczenia) wyszły identyczne. Przypadek? Nie sądzę!

Tw. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zał. że $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oraz $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ są ciągłe. Wtedy

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f.$$

D-d.
(następnym razem).