Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych

Zamiana zmiennych to zastosowanie przekształcenia $F: \Delta \to D$, gdzie $\Delta, D \subseteq \mathbb{R}^2$. O przekształceniu F zakładamy, że jest różnowartościowe oraz ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Opiszmy sytuację bardziej szczegółowo

$F(u,v) \in \mathbb{R}^2$, więc $F(u,v) = (\varphi(u,v), \Psi(u,v))$ dla pewnych funkcji $\varphi, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Zakładamy zatem, że $\frac{\partial \Psi}{\partial u}, \frac{\partial \Psi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ są ciągłe.

[Użycie u, v jest celowe. Nie dla zmylenia przeciwnika, ale po to by "oddzielić" to co dzieje się w Δ od tego co dzieje się w D.]

Zamiana zmiennych opisana jest zatem przez układ równań:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \Psi(u,v) \end{cases}$$

Jakobian naszego przekształcenia to $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} \end{vmatrix}$, czyli wyznacznik pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu.

Tw. (o zamianie zmiennych) $\iint\limits_{\Delta} f(\varphi(u,v), \Psi(u,v))\, J \, du\, dv = \iint\limits_{D} f(x,y)\, dx\, dy$

Praktycznie, aby zastosować podstawienie sprzed naturalnych

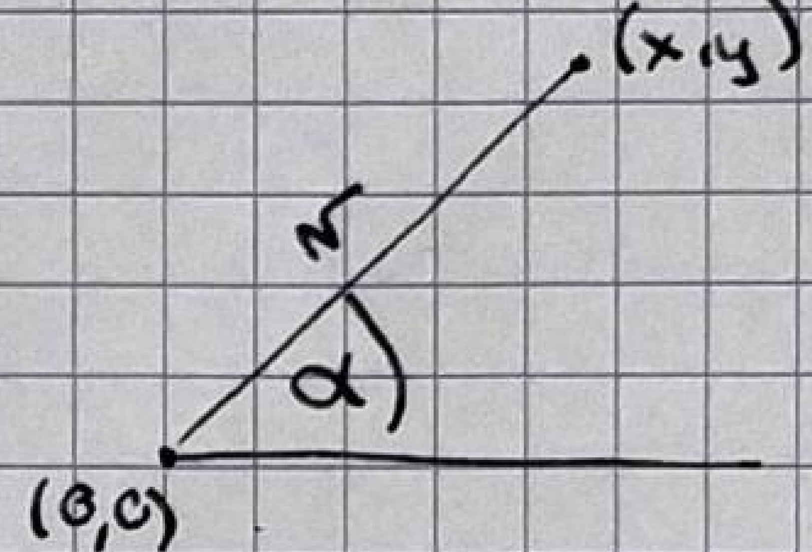
$x \leftarrow \varphi(u,v) \qquad y \leftarrow \Psi(u,v)$

trzeba wyliczyć jakobian oraz "rozsądnie" opisać obszar Δ (mając opis D).

Zmienne biegunowe.

Jest to często stosowane podstawienie:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$



Używamy typowych naturalnych oznaczeń: r – to odległość od $(0,0)$ do (x,y)

α – kąt między osią Ox oraz prostą łączącą $(0,0)$ z (x,y).

Policzmy jakobian

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\alpha) = \cos\alpha \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}(r\cos\alpha) = -r\sin\alpha$$

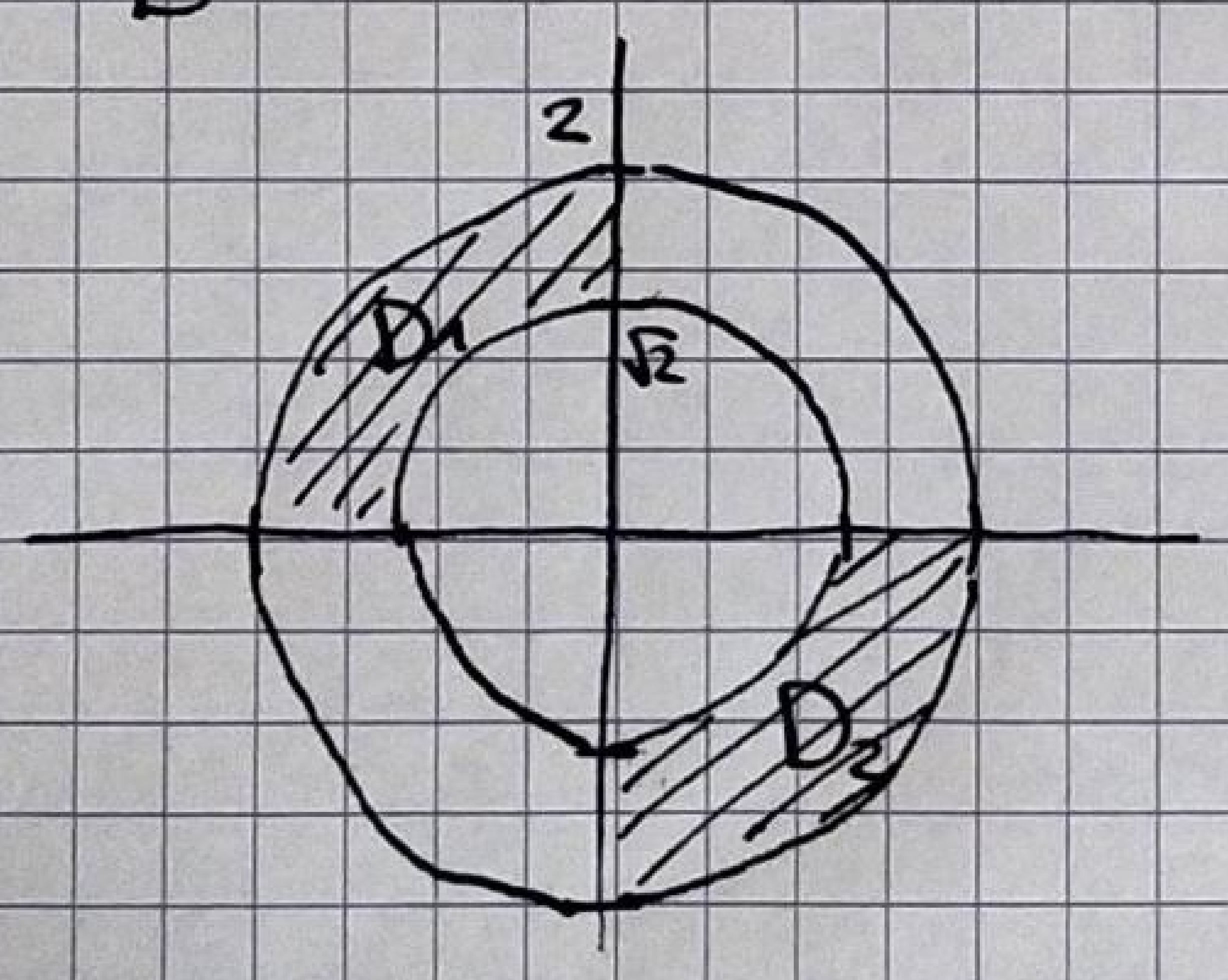
$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\alpha) = \sin\alpha \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}(r\sin\alpha) = r\cos\alpha$$

Zatem

$$J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r.$$

Przykład.

Obliczmy $\iint\limits_D xy\,dxdy$, gdzie $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4 \wedge x^2+y^2 \geq 2 \wedge xy \leq 0\}$



$D = D_1 \cup D_2$

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \iint\limits_{D_1} xy\,dxdy + \iint\limits_{D_2} xy\,dxdy$$

Skoncentrujemy się na D_1 (D_2 zostawiamy jako ćwiczenie)
Zastosujemy współrzędne biegunowe.
Mamy wtedy $\Delta_1 = \{ (r, \alpha) : \sqrt{2} \leq r \leq 2, \ \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \}$
(Najprościej odczytać to z rysunku; można też analitycznie:

$2 \leq x^2+y^2 \leq 4 \rightsquigarrow 2 \leq r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha \leq 4 \rightsquigarrow \sqrt{2} \leq r \leq 2$

$xy \leq 0 \rightsquigarrow r^2\cos\alpha\sin\alpha \leq 0 \rightsquigarrow \sin 2\alpha \leq 0 \rightsquigarrow \ldots$

$\rightsquigarrow \ldots$ dostaniemy 2 przedziały (dla D_1, Δ_1 oraz D_2, Δ_2 odpowiednio))

$$\iint\limits_{D_1} xy\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta_1} (r\cos\alpha)(r\sin\alpha)\cdot J\,dr\,d\alpha = \left\{ \begin{array}{l} J = r \\ \text{uwzględniamy opis } \Delta_1 \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^3 \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha \right) dr =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2\alpha}{2}\,d\alpha \right) dr = \int_{\sqrt{2}}^{2} r^3 \left(-\frac{\cos 2\alpha}{4} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) dr =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} -\frac{r^3}{4}\,dr = -\frac{r^4}{16}\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = -\frac{2^4}{16} + \frac{\sqrt{2}^4}{16} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Twierdzenie o zamianie zmiennych "pracuje" w dowolnym wymiarze. Oczywiście dla $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jakobian to wyznacznik macierzy $n \times n$.

Skoncentrujemy się na dwóch podstawieniach dla $n=3$.

Współrzędne walcowe
Idea: w płaszczyźnie xy zastosować współrzędne biegunowe, a z zostawić w spokoju. Formalnie:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \end{cases}$$

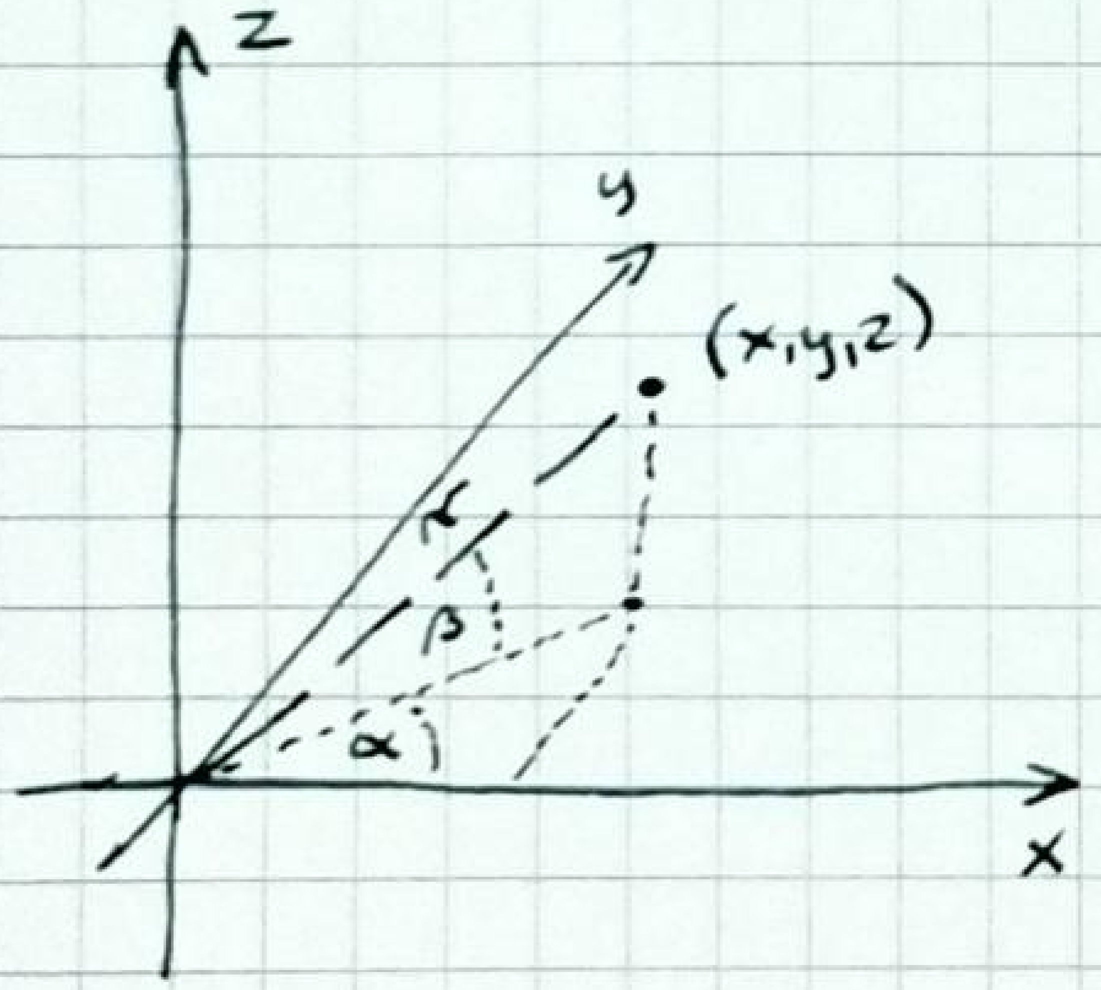
Wtedy $\frac{\partial}{\partial z} z = 1$, $\quad \frac{\partial}{\partial z}(r\cos\alpha) = 0 \ \ldots$

Jakobian ma postać:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = r$$

Współrzędne sferyczne.

Teraz idziemy na całość z uogólnieniem współrzędnych biegunowych na $\mathbb{R}^3$. Punkt w przestrzeni opisujemy przez r (odległość od $(0,0,0)$) oraz dwa kąty α (na płaszczyźnie OXY pomiędzy osią OX a prostą łączącą $(0,0)$ z rzutem naszego punktu na OXY), β (między płaszczyzną OXY a prostą łączącą nasz punkt z $(0,0,0)$)



Analitycznie:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\alpha \\ y = r\cos\beta\sin\alpha \\ z = r\sin\beta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\beta\cos\alpha & -r\cos\beta\sin\alpha & -r\sin\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha & r\cos\beta\cos\alpha & -r\sin\beta\sin\alpha \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\beta \begin{vmatrix} -r\cos\beta\sin\alpha & -r\sin\beta\cos\alpha \\ r\cos\beta\cos\alpha & -r\sin\beta\sin\alpha \end{vmatrix} +$$

rozwijamy wyznacznik względem trzeciego wiersza

$$+ r\cos\beta \begin{vmatrix} \cos\beta\cos\alpha & -r\cos\beta\sin\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha & r\cos\beta\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\beta\left(r^2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + r^2\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta\right) +$$

$$+ r\cos\beta\left(r\cos^2\alpha\cos^2\beta + r\sin^2\alpha\cos^2\beta\right) =$$

$$= r^2\sin^2\beta\cos\beta + r^2\cos^3\beta = r^2\cos\beta \quad .$$

Scanned by TapScanner