Pochodna kierunkowa

Def. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Pochodną kierunkową w punkcie (x_0, y_0), kierunku $\vec{v}$

(dla $\vec{v}$ spełniającego warunek $1 = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$)

nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Uwaga. Dla $\vec{v}$ o długości różnej od 1 najpierw normujemy wektor, tzn. tworzymy $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right)$

Pochodna w kierunku $\vec{v}$, to pochodna w kierunku $\vec{w}$.

Przykład. Jeśli $\vec{v} = (1, 0)$, to

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Analogicznie dla $\vec{w} = (0, 1)$

$$f'_{\vec{w}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Fakt. Jeśli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe w (x_0, y_0) oraz $|\vec{v}| = 1$, $\vec{v} = (v_x, v_y)$, to

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

d-d.

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0 + hv_y) + f(x_0, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

Scanned by TapScanner

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hv_x, y_0+hv_y) - f(x_0, y_0+hv_y)}{hv_x} \cdot v_x +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+hv_y) - f(x_0,y_0)}{hv_y} \cdot v_y = (*)$$

Korzystamy teraz z tw. Lagrange'a (nasze ilorazy traktujemy jako funkcję jednej zmiennej h). Dostajemy

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Theta_h v_x, y_0 + hv_y)\, v_x + \quad \Theta_h \in (0,h)$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \xi_h v_y)\, v_y = \quad \xi_h \in (0,h)$$

{korzystamy z ciągłości pochodnych cząstkowych}

$$= v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0). \quad \square$$

Dla funkcji $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ oraz $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ definiujemy pochodną kierunkową analogicznie jak w $\mathbb{R}^2$. Jeśli pochodne cząstkowe są ciągłe, to zachodzi wzór: $\quad f'_{\vec{v}} = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$

(Zakładamy, że $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 1$.)

Różniczka zupełna

Def. Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma pochodne cząstkowe. Różniczką zupełną w punkcie (x_0,y_0) nazywamy wyrażenie

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot \Delta y$$

(Jak widać wartość tego wyrażenia zależy też od dwóch parametrów Δx, Δy)

Przy naturalnych założeniach różniczka zupełna dobrze opisuje

przyrost funkcji: $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$.
Precyzyjnie opisuje to:

Fakt. Jeśli pochodne cząstkowe są ciągłe ($w(x_0,y_0)$), to

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.$$

d-d.

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) +$$
$$+ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

Podobnie jak przy pochodnej kierunkowej korzystamy z tw. Lagrange'a dostając

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x +$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Theta_y)\cdot\Delta_y$$

Tu $|\Theta_x| < |\Delta x|$, $|\Theta_y| < |\Delta y|$.

Mamy zatem:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_x, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) +$$

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Theta_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Wyrażenia w nawiasach dążą do 0 z ciągłości pochodnych, a wyrażenia przed nawiasami są, co do wartości bezwzględnej ograniczone przez 1. $\square$

Płaszczyzna styczna.

Dla $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (o ciągłych pochodnych cząstkowych) płaszczyzna styczna w punkcie (x_0,y_0) ma postać

$$z - f(x_0,y_0) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Przykład.

$$f(x,y) = e^x \sin(x+y), \quad (x_0,y_0) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin(x+y) + e^x \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = e^0 \sin\frac{\pi}{4} + e^0 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Płaszczyzna styczna ma wzór: $z - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Niech $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$; f ma ciągłe pochodne cząstkowe.

Zdefiniujmy $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi(t) = f(x_0+ht, y_0+kt)$$

Policzmy

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(x_0+h(t+\Delta t), y_0+k(t+\Delta t)) - f(x_0+ht, y_0+kt)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0+ht+h\Delta t, y_0+kt+k\Delta t) - f(x_0+ht, y_0+kt+k\Delta t)}{h\Delta t}\cdot h +$$

$$+ \frac{f(x_0+ht, y_0+kt+k\Delta t) - f(x_0+ht, y_0+kt)}{k\Delta t}\cdot k =$$

$$= h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+ht, y_0+kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+ht, y_0+kt).$$