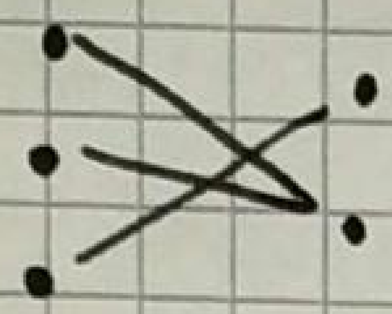
Twierdzenie Halla

Def. Graf $G=(V,E)$ nazywamy dwudzielnym jeśli istnieje rozbicie zbioru wierzchołków $V=V_1\cup V_2$ $(V_1\cap V_2=\emptyset)$, dla którego $E\subseteq\{\{v_1,v_2\}: v_1\in V_1,\ v_2\in V_2\}$.

Przykład.



G_1

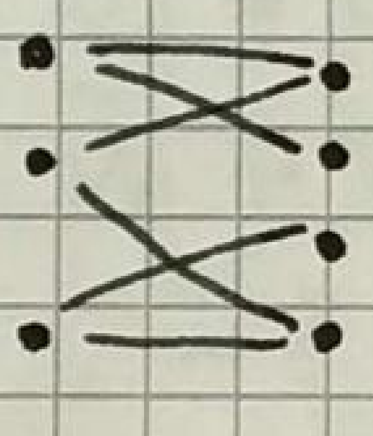
G_2

Def. Niech $G=(V,E)$ będzie grafem dwudzielnym (o podziale V_1, V_2). Skojarzeniem nazywamy dowolną funkcję $f: V_1\to V_2$ spełniającą warunki

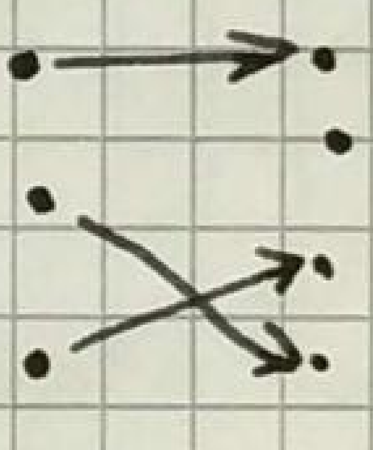
- f jest iniekcją,
- $\forall v_1\in V_1 \quad \{v_1, f(v_1)\}\in E$.

Przykład. G_1 nie ma skojarzenia (dla V_1 lewa strona, V_2 prawa)

G_3:



f:



Warunek konieczny istnienia skojarzenia:

Oznaczmy $N(V')=\{w\in V_2 : \exists v\in V' \quad \{v,w\}\in E\}$ dla $V'\subseteq V_1$

jest to zbiór sąsiadów elementów z V'.

Zał. że graf dwudzielny $G=(V_1\cup V_2, E)$ ma skojarzenie f.

Wtedy dla dowolnego $V'\subseteq V_1$ mamy

$$f[V']\subseteq N(V')$$

ponadto z różnowartościowości f $\quad |f[V']|=|V'|$. Zatem

$$|V'|\leq |N(V')|.$$

Warunek $\forall V' \subseteq V_1 \quad |V'| \leqslant |N(V')|$
nosi nazwę warunku Halla.

Tw. (Hall). Graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ma skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Halla.

Wystarczy udowodnić implikację $\Leftarrow$.

Dowód I. (przez indukcję względem $|V_1|$)

- dla $|V_1| = 1$ nie ma czego dowodzić :)

∴ właściwą część dowodu podzielimy na 2 przypadki

$1^\circ \quad \forall V' \subseteq V_1 \quad V' \neq V_1 \rightarrow |N(V')| \geqslant |V'| + 1$

(czyli zawsze mamy zapas w stosunku do oryginalnego warunku Halla)

Wybieramy dowolny wierzchołek $v \in V_1$ oraz $w \in V_2$ tak, by $\{v, w\} \in E$.

Tworzymy graf $\tilde{G} = (\tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2, \tilde{E})$ następująco:

$\tilde{V}_1 = V_1 \setminus \{v\}$

$\tilde{V}_2 = V_2 \setminus \{w\}$

$\tilde{E} = \{ \{x, y\} \in E : \{x, y\} \cap \{v, w\} = \emptyset \}$

Graf $\tilde{G}$ jest dwudzielny i spełnia warunek Halla,

bo $N(V')_{\tilde{G}} \subseteq N_G(V') \setminus \{w\}$ i mieliśmy 1 w zapasie.

Z założenia indukcyjnego istnieje zatem skojarzenie

$\tilde{f} : \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_2$ dla grafu $\tilde{G}$

$f = \tilde{f} \cup \{(v, w)\}$ jest skojarzeniem dla grafu G. ▪

2° dopełnienie 1°, czyli

$\exists V' \subseteq V_1 \quad V' \neq V_1 \wedge |V'| = |N(V')|$

Rozważmy teraz graf

$G' = (V' \cup N(V'), E')$, gdzie $E' = E \cap \{\{x, y\} : x \in V'\}$

Graf G' jest dwudzielny i spełnia warunek Halla.
Z założenia indukcyjnego istnieje zatem
$f' : V' \longrightarrow N(V')$ skojarzenie dla G'.
Z pozostałych wierzchołków zbudujmy graf G''
$G'' = (V_1 \setminus V', V_2 \setminus N(V'), E'')$,
gdzie $E'' = \{\{x,y\} : x \in V_1 \setminus V', y \in V_2 \setminus N(V')\}$.
G'' jest grafem dwudzielnym.
Pozostaje pokazać, że G'' spełnia warunek Halla.
Weźmy dowolny $W \subseteq V_1 \setminus V'$

$$N(W) = \underbrace{\left(N(W) \cap N(V')\right)}_{N'} \cup \underbrace{\left(N(W) \cap (V_2 \setminus N(V'))\right)}_{N''}$$

(Chcemy pokazać, że $|N''| \geqslant |W|$)
Mamy

$$N(W \cup V_1') = N(V_1') \cup N''$$

oraz $|N(W \cup V_1')| \geqslant |W \cup V_1'| = |W| + |V_1'|$

$$|N(W \cup V_1')| = |N(V_1')| + |N''| = |V_1'| + |N''|$$

czyli $|W| \leqslant |N''|$ sukces!
Znów założenie indukcyjne i dostajemy
$f'' : V_1 \setminus V' \longrightarrow V_2 \setminus N(V')$ skojarzenie dla G''
Finalnie
$f = f' \cup f'' : V_1 \longrightarrow V_2$ jest skojarzenie dla G.

☑

Dowód II (przez indukcję względem $\overbrace{\sum_{v \in V_1} |N(v)|}^{=|E|}$)

1° zał. że $\forall v \in V_1 \quad |N(v)| = 1$.
Wtedy nie ma co robić:
$f(v) =$ jedyny element $N(v)$
dla $v \neq v'$ $\quad f(v) \neq f(v')$, bo $|N(\{v, v'\})| \geqslant 2$.

Scanned by TapScanner

2° dopełnienie 1°, czyli

dla pewnego $v \in V_1$ $\quad |N(v)| \geq 2$.

Niech $w_1 \neq w_2$ $\quad w_1, w_2 \in N(v)$.

Pokażemy, że jedną z krawędzi $\{v, w_1\}$, $\{v, w_2\}$ można usunąć, aby graf nadal spełniał warunek Halla.

Załóżmy zatem, że tak nie jest

Istnieją wtedy

$$V' \subseteq V_1 \quad |N_{G'}(V')| < |V'| \quad G' = (V_1 \cup V_2, E \setminus \{\{v, w_1\}\})$$

$$V'' \subseteq V_1 \quad |N_{G''}(V'')| < |V''| \quad G'' = (V_1 \cup V_2, E \setminus \{\{v, w_2\}\})$$

Oryginalnie:

$$|N(V' \cup V'')| \geq |V' \cup V''|$$

$$N(V') = N_{G'}(V') \cup \{\{v, w_1\}\}$$

$$N(V'') = N_{G''}(V'') \cup \{\{v, w_2\}\}$$

(w szczególności $v \in V' \cap V''$)

Mamy zatem

$$|V'| + |V''| \geq |N_{G'}(V')| + |N_{G''}(V'')| + 2$$

$$= |N_{G'}(V') \cup N_{G''}(V'')| + |N_{G'}(V') \cap N_{G''}(V'')| + 2 \quad *$$

$$N_{G'}(V') \cup N_{G''}(V'') = N(V' \cup V''), \text{ bo } w_1 \in N_{G''}(V''),\ w_2 \in N_{G'}(V')$$

$$N_{G'}(V') \cap N_{G''}(V'') \supseteq N(V' \setminus \{v\}) \cap N(V'' \setminus \{v\}) \supseteq N(V' \cap V'' \setminus \{v\})$$

Wracamy do $*$:

$$* \geq |N(V' \cup V'')| + |N((V' \cap V'') \setminus \{v\})| + 2 \geq$$

$$\geq |V' \cup V''| + |V' \cap V''| - 1 + 2 = |V'| + |V''| + 1$$

co jest sprzecznością.

Stosujemy zatem zał. indukcyjne do G' bądź G'' i dostajemy skojarzenie w wyjściowym grafie. $\square$