Klasy kombinatoryczne

Def. Klasą kombinatoryczną nazywamy parę $(\mathcal{A}, \| \, \|_{\mathcal{A}})$, gdzie $\mathcal{A}$ jest zbiorem, a $\| \, \|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ spełnia warunek:

$$(\forall n)\left(\{a \in \mathcal{A} : \|a\|_{\mathcal{A}} = n\} \text{ jest skończony}\right).$$

Przyjmujemy oznaczenia
$$\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : \|a\|_{\mathcal{A}} = n\}$$
$$a_n = |\mathcal{A}_n|.$$

Jeśli $(\mathcal{A}, \| \, \|_{\mathcal{A}})$ jest klasą kombinatoryczną, to jej uniwersum $\mathcal{A}$ jest zbiorem przeliczalnym.

W istocie: $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ zatem $\mathcal{A}$ jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów skończonych (w szczególności przeliczalnych) i już.

Przykłady.

$\mathcal{E} = \{\varepsilon\} \quad \|\varepsilon\|_{\mathcal{E}} = 0$

$\mathcal{Z} = \{a\} \quad \|a\|_{\mathcal{Z}} = 1$

$\mathcal{N} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \|x\|_{\mathcal{N}} = x.$

Funkcja tworząca klasy $(\mathcal{A}, \| \cdot \|_{\mathcal{A}})$, to

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(jest to szereg formalny, ale czasami bywa zbieżny i łatwiej z nim pracować)

Przykłady

$$E(x) = 1; \qquad Z(x) = x; \qquad N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(dla $|x| < 1$, oczywiście)

Def. Klasy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są izomorficzne jeśli istnieje bijekcja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ spełniająca warunek:

$$(\forall a \in \mathcal{A})\left(\|a\|_{\mathcal{A}} = \|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}} \right).$$

Używamy notacji $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Fakt. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A(x) = B(x)$.

d-d.

$\Rightarrow$ zauważmy, że $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{\|\alpha\|_{\mathcal{A}}}$

Zatem

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{\|\alpha\|_{\mathcal{A}}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x^{\|\varphi(\alpha)\|_{\mathcal{B}}} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} x^{\|\beta\|_{\mathcal{B}}} = B(x).$$

korzystamy z bijektywności φ.

$\Leftarrow$ Z równości $A(x) = B(x)$ dostajemy $(\forall n)\, a_n = b_n$, czyli $|\mathcal{A}_n| = |\mathcal{B}_n|$.

oznacza to, że istnieje bijekcja $\varphi_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$

Tu $\|\varphi_n(a)\|_{\mathcal{B}} = n = \|a\|_{\mathcal{A}}$ dla $a \in \mathcal{A}_n$.

Niech

$$\varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n .$$

φ jest $\underbrace{\text{bijekcją}}_{\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}}$ i zachowuje rangę. $\boxtimes$

Def. Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą klasami kombinatorycznymi.

$\mathcal{A} + \mathcal{B}$ to klasa o uniwersum $\mathcal{A} \times \{0\} \cup \mathcal{B} \times \{1\}$ oraz funkcji rangi

$$\|(x,i)\|_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = \begin{cases} \|x\|_{\mathcal{A}} & \text{dla } i = 0 \\ \|x\|_{\mathcal{B}} & \text{dla } i = 1 \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

Uwaga. Intencją klasy $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ jest wrzucenie elementów klasy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ do jednej wspólnej klasy i pozostawienie niezmienionej rangi. Zabieg $\mathcal{A}\times\{0\}$, $\mathcal{B}\times\{1\}$ jest dokonany po to, by zabezpieczyć się przed sytuacją $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\neq\emptyset$.

Fakt. $(A+B)(x) = A(x)+B(x)$.

d-d.

$$|\{y\in\mathcal{A}+\mathcal{B} : \|y\|_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}=n\}| =$$
$$|\{y\in\mathcal{A} : \|y\|_{\mathcal{A}}=n\}| + |\{y\in\mathcal{B} : \|y\|_{\mathcal{B}}=n\}|. \ \square$$

Def. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ klasy. $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ to klasa o uniwersum
$$\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \{(\alpha,\beta) : \alpha\in\mathcal{A}, \beta\in\mathcal{B}\}$$
oraz funkcji rangi
$$\|(\alpha,\beta)\|_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} = \|\alpha\|_{\mathcal{A}} + \|\beta\|_{\mathcal{B}}.$$

Przykład.

$\mathcal{E}\times\mathcal{E} = \{(\varepsilon,\varepsilon)\}$ $\|(\varepsilon,\varepsilon)\| = 0+0=0$, czyli $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\cong\mathcal{E}$

Fakt. Dla dowolnej klasy $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}\times\mathcal{E}\cong\mathcal{E}\times\mathcal{A}\cong\mathcal{A}$.

d-d.

$\varphi((x,\varepsilon)) = x$ zadaje bijekcję pomiędzy $\mathcal{A}\times\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}$. $\square$

Fakt. $(A\times B)(x) = A(x)\cdot B(x)$

d-d.

Niech $\mathcal{C}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

$$C_n = \{(\alpha,\beta) : \|\alpha\|_{\mathcal{A}}+\|\beta\|_{\mathcal{B}} = n\} = \dot{\bigcup_{k=0}^{n}} \{(\alpha,\beta) : \|\alpha\|_{\mathcal{A}} = k, \|\beta\|_{\mathcal{B}} = n-k\}$$
$$= \dot{\bigcup_{k=0}^{n}} A_k\times B_{n-k}.$$

Mamy zatem $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (ta operacja nosi nazwę "splot")

Mamy:

$$A(x)B(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C(x). \quad \square$$

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą kombinatoryczną o własności $a_0 = 0$.
$\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$ oznacza klasę ciągów nad klasą $\mathcal{A}$, czyli

$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) : k \geqslant 0,\ \alpha_i \in \mathcal{A}\}$

Przyjmujemy $\|\emptyset\| = 0$ oraz $\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)\| = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha_i\|_{\mathcal{A}}$

Uwaga. Założenie $a_0 = 0$ jest istotne! Inaczej dostaniemy nieskończenie wiele elementów rangi 0 w klasie Seq, co jest zakazane.

Uwaga. $\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{E} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}) + \dots$
Suma jest tu nieskończona, ale ma sens z uwagi na $a_0 = 0$.
W klasie $\underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{n \text{ razy}}$ występują elementy rangi $\geqslant n$!

Fakt. $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})(x) = \dfrac{1}{1 - A(x)}$.

d-d.

$$\mathrm{Seq}(\mathcal{A})(x) = \left(\mathcal{E} + \mathcal{A} + (\mathcal{A}\times\mathcal{A}) + (\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}) + \dots\right)(x) =$$

$$= 1 + A(x) + (A(x))^2 + (A(x))^3 + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - A(x)} \quad \square$$