Ograniczone klasy kombinatoryczne

Def. $\mathrm{Seq}_k(\mathcal{A}) = \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A}}_{k}$

$\mathrm{Seq}_k(\mathcal{A})$ jest klasą ciągów długości k. Traktujemy ją jak podklasę klasy $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$. Mamy zatem

$$\|(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\|_{\mathrm{Seq}_k(\mathcal{A})} = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha_i\|_{\mathcal{A}}$$

Fakt. $\mathrm{Seq}_k(\mathcal{A})(x) = \left(A(x)\right)^k$.

Analogicznie definiujemy klasy ograniczone będące podklasami $\mathrm{Pset}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Mset}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Cycle}(\mathcal{A})$.

Def. $\mathrm{Pset}_k(\mathcal{A}) = \mathrm{Seq}_k(\mathcal{A}) / R_P$

$\mathrm{Mset}_k(\mathcal{A}) = \mathrm{Seq}_k(\mathcal{A}) / R_M$

$\mathrm{Cycle}_k(\mathcal{A}) = \mathrm{Seq}_k(\mathcal{A}) / R_C$,

gdzie R_P jest relacją równoważności używaną przy def $\mathrm{Pset}(\mathcal{A})$

R_M — " — $\mathrm{Mset}(\mathcal{A})$

R_C — " — $\mathrm{Cycle}(\mathcal{A})$

Fakt. Niech $\mathcal{B} = \mathrm{Pset}_2(\mathcal{A})$. Wtedy

$$B(x) = \frac{(A(x))^2 - A(x^2)}{2}$$

d-d.

Pokażemy, że $\mathcal{B} + \mathcal{B} + \Delta(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \times \mathcal{A}$

Niech $\leqslant$ będzie liniowym porządkiem na $\mathcal{A}$

(Ów porządek można zrobić używając faktu, że $\mathcal{A}$ jest przeliczalna, i.e $\mathcal{A} = \{\alpha_i : i \in I\}$, gdzie $I = \mathbb{N}$ lub $I = \{1, 2, \dots, k\}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Kładziemy

$$\alpha_i \leqslant \alpha_j \iff i \leqslant j. \quad \lrcorner$$

Uniwersum klasy $\mathcal{B} + \mathcal{B} + \Delta(\mathcal{A})$ to

$\{(\{\alpha,\beta\}, i) : \alpha \neq \beta,\ \alpha,\beta \in \mathcal{A},\ i \in \{0,1\}\} \cup \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$

$\varphi : \mathcal{B} + \mathcal{B} + \Delta(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ definiujemy następująco

$\varphi((\{\alpha,\beta\}, 0)) = (\alpha,\beta)$ dla $\alpha < \beta$

$\varphi((\{\alpha,\beta\}, 1)) = (\beta,\alpha)$ — II —

$\varphi((\alpha,\alpha)) = (\alpha,\alpha)$

φ jest bijekcją oraz zachowuje rangę.

Mamy zatem $B(x) + B(x) + \Delta(\mathcal{A})(x) = A(x) \cdot A(x)$

Z poprzedniego wykładu $\Delta(\mathcal{A})(x) = A(x^2)$, czyli

$$B(x) = \frac{(A(x))^2 - A(x^2)}{2} \quad \boxtimes$$

Fakt. Niech $\mathcal{C} = \mathrm{Mset}_2(\mathcal{A})$. Wtedy

$$C(x) = \frac{(A(x))^2 + A(x^2)}{2}.$$

d-d.

Wystarczy wykazać, że $\mathcal{C} + \mathcal{C} \cong (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + \Delta(\mathcal{A})$

Formalny opis zostawiamy jako ćwiczenie.

(Idea. Dla multizbiorów o dwóch różnych elementach postępujemy tak jak w $\mathrm{Pset}_2(\mathcal{A})$, multizbiory o jedynym elemencie krotności 2 z pierwszej klasy wysyłamy do $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, z drugiej – do $\Delta(\mathcal{A})$)

Mamy zatem

$$2C(x) = (A(x))^2 + A(x^2). \quad \boxtimes$$

Uwaga. $\mathrm{Cycle}_2(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Mset}_2(\mathcal{A})$.

Funkcje tworzące dwóch zmiennych

Niech $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Seq}(\mathcal{A})$. Wtedy

$$B(x,y) = \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{B}} x^{\|\bar{\alpha}\|_{\mathcal{B}}} y^{|\bar{\alpha}|}$$

gdzie $\|\bar{\alpha}\|_{\mathcal{B}} = \|(\alpha_1, \dots, \alpha_k)\|_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha_i\|_{\mathcal{A}}$ {ranga w $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$}

$|\bar{\alpha}| = k$ {długość ciągu}

Definicję funkcji tworzącej dwóch zmiennych można rozszerzyć na klasy postaci $\mathcal{B}/R$, gdzie $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Seq}(\mathcal{A})$
R jest relacją równoważności zachowującą rangę oraz DODATKOWO zachowującą długość, i.e. $\bar{\alpha} R \bar{\beta} \Rightarrow |\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}|$.

Fakt. Niech $\mathcal{B} = \mathrm{Seq}(\mathcal{A})$. Wtedy

$$B(x,y) = \frac{1}{1 - yA(x)}.$$

d-d.

Mamy $\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{E} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}) + \dots$

Stąd

$$B(x,y) = 1 + A(x,y) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A})(x,y) + \dots$$

Zauważmy, że $(\underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{k})(x,y) = A(x)^k y^k$ | wszystkie ciągi są długości k

Zatem

$$B(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (yA(x))^k = \frac{1}{1 - yA(x)}. \quad \blacksquare$$

Tw. Niech $\mathcal{C} = \mathrm{Pset}(\mathcal{A})$, $\mathcal{D} = \mathrm{Mset}(\mathcal{A})$. Wtedy

$$C(x,y) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+yx^k)^{a_k} = e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k A(x^k)\right)}$$

$$D(x,y) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-yx^k)^{-a_k} = e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} y^k A(x^k)\right)}$$

d-d.

Przebiega analogicznie jak dla funkcji jednej zmiennej.
Rozważmy klasę $\mathcal{C}$. Załóżmy najpierw, że $\mathcal{A}$ jest skończone
$\mathcal{A} = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ $\quad S_i = \{s_i\}$
Wtedy $\mathcal{C} \cong (\mathcal{E}+S_1)\times(\mathcal{E}+S_2)\times\ldots\times(\mathcal{E}+S_m)$
$(\mathcal{E}+S_i)(x,y) = 1\cdot y^0 + x^{\|s_i\|}\cdot y = 1 + x^{\|s_i\|}\cdot y$
Zatem
$$\mathcal{C}(x,y) = \prod_{i=1}^{m} (1+x^{\|s_i\|}y) = \prod_{k\geq 1} (1+yx^k)^{a_k}.$$

Przejście do ∞ jest analogiczne jak w przypadku jednej zmiennej.
[Pozostałe równości pozostawiamy jako ćwiczenie.] $\square$

Przykład. Obliczmy używając tw. funkcję tworzącą $\mathrm{Pset}_2(\mathcal{A})$.
Mamy $\mathrm{Pset}_2(\mathcal{A})(x) = [y^2]\,C(x,y)$.

$$[y^2]\,C(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{a_k}{2} x^{2k} + \sum_{k<j} a_k a_j x^{k+j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(a_k-1)}{2} x^{2k} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq j} a_k a_j x^{k+j} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k} a_k^2 x^{2k} + \sum_{k\neq j} a_k a_j x^{k+j} - \sum_{k} a_k x^{2k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k,j} a_k a_j x^{k+j} - A(x^2)\right) = \frac{1}{2}\left((A(x))^2 - A(x^2)\right).$$