Klasy kombinatoryczne – przykłady zastosowań

Przykład 1. Klasa drzew binarnych uporządkowanych $\mathcal{T}$

Zauważmy, że $\quad \mathcal{T} \cong \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{T}$

W istocie funkcja $\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{T}$

zadana wzorem:
$$\varphi(B) = \begin{cases} \varepsilon & \text{dla } B = \emptyset \\ (L, z, P) & \text{dla } B = {}_{L}\diagup^{\bullet}\diagdown_{P} \end{cases}$$

jest bijekcją. Co więcej φ zachowuje rangę:
$$\|B\|_{\mathcal{T}} = \| {}_{L}\diagup^{\bullet}\diagdown_{P} \| = \|L\|_{\mathcal{T}} + 1 + \|P\|_{\mathcal{T}}$$

Dostajemy zatem równość funkcji tworzących:
$$T(x) = 1 + T(x) \cdot x \cdot T(x) = 1 + x\big(T(x)\big)^2$$

Skąd $\quad T(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$,

co jest, rzecz jasna, znaną nam funkcją tworzącą dla liczb Catalana.

Przykład 2.

Zastanawiamy się na ile sposobów można zapisać liczbę n jako sumę liczb $1, 2$ (kolejność ma znaczenie)

$0 = 0$, (suma pusta)

$1 = 1$,

$2 = 1+1 = 2$,

$3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$, ...

Niech $\mathcal{A} = \{①, ②\}$, gdzie $\|①\|_{\mathcal{A}} = 1 \quad \|②\|_{\mathcal{A}} = 2$.

Niech $\mathcal{B} = \mathrm{Seq}(\mathcal{A})$.

Zauważmy, że $B_n = \{\beta \in \mathcal{B} : \|\beta\|_{\mathcal{B}} = n\}$ jest odpowiedzią na nasze pytanie.

Znajdźmy funkcję tworzącą klasy $\mathcal{B}$.

Mamy $A(x) = x + x^2$

Zatem $$B(x) = \frac{1}{1-A(x)} = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Przypomnijmy, że funkcja tworząca dla ciągu Fibonacciego

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \text{ dla } n \geq 0 \end{cases}$$ ma postać $\frac{x}{1-x-x^2}$

Morał: $B_n = f_{n+1}$.

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą oraz $\mathcal{A}_0 = \emptyset$.
Klasa $\mathrm{Cycle}(\mathcal{A})$ to $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})/R$, gdzie
$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \, R \, (b_0, b_1, \dots, b_{m-1}) \iff$$
$$(\exists k)(\forall i)(a_i = b_{i+k \bmod m})$$

Twierdzenie. $$\mathrm{Cycle}(\mathcal{A})(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(\frac{1}{1-\mathcal{A}(x^k)}\right).$$
(dowodu nie będzie)

Spróbujmy zrozumieć treść $\varphi(k)$ = liczba liczb względnie pierwszych z k i mniejszych° od k (inaczej $|\mathbb{Z}_k^*|$) ° (niewiększych!)
φ jest funkcją Eulera. $\varphi(1) = 1$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

Podstawowe własności funkcji Eulera
$\varphi(p) = p - 1$ dla liczby pierwszej p
$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ Zad. Udowodnić to (przypomnieć sobie dowód z algebry). dla $NWD(a,b) = 1$.

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1) = p^n\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Wniosek. Załóżmy, że $a \in \mathbb{N}$. $\varphi(a) = a \prod_{\substack{p \mid a \\ p \text{ pierwsza}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

[Wystarczy przedstawić a w postaci $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$, gdzie $\{p_1, \dots, p_k\}$ są wszystkimi pierwszymi dzielnikami a.]

Przykład. Ile różnych korali (bez zapięcia) o 6 paciorkach można utworzyć z paciorków białych i czarnych?

Zaczynamy od klasy $\mathcal{A} = \{b, c\}$ $\quad \|b\| = \|c\| = 1$.

Robimy $\mathrm{Cycle}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Interesuje nas b_6.

Mamy $A(x) = 2x$

W sumie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(\frac{1}{1-A(x^k)}\right)$ $\quad x^6$ występuje dla k o własności $k \mid 6$.

dla $k=1$

$$\frac{\varphi(1)}{1} \ln\left(\frac{1}{1-A(x)}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{(A(x))^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{2^n x^n}{n}$$

czyli przy x^6 stoi $\frac{2^6}{6} = \frac{2^5}{3}$

dla $k=2$

$$\frac{\varphi(2)}{2} \ln\left(\frac{1}{1-A(x^2)}\right) = \frac{1}{2} \sum \frac{2^n x^{2n}}{n}$$

czyli przy x^6 stoi $\frac{1}{2}\frac{2^3}{3} = \frac{2^2}{3}$

dla $k=3$

$$\frac{\varphi(3)}{3} \sum \frac{2^n x^{3n}}{n}$$

czyli przy x^6 stoi $\frac{2 \cdot 2^2}{2 \cdot 3} = \frac{2^2}{3}$

dla $k=6$

$$\frac{\varphi(6)}{6} \sum \frac{2^n x^{6n}}{n} = \frac{2}{6} \sum \frac{2^n x^{6n}}{n}$$

czyli przy x^6 stoi $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$

Finalnie $b_6 = \frac{2^5}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(16+4+1) = 2 \cdot 7 = 14$

Pomocnicza klasa $\Delta(\mathcal{A})$

$\Delta(\mathcal{A}) = \{(a,a) : a \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$

Zauważmy, że $\Delta(\mathcal{A})(x) = A(x^2)$, bo

$$\{(a,a) : \|(a,a)\| = 2n\} = \{a : \|a\| = n\}$$

Fakt. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą kombinatoryczną oraz $\mathcal{A}_0 = \emptyset$.

Połóżmy $\mathcal{M} = \mathrm{Mset}(\mathcal{A})$, $\mathcal{P} = \mathrm{Pset}(\mathcal{A})$. Wtedy

$$M(x) = P(x)\, M(x^2).$$

d-d.

Wykażemy izomorfizm $\mathcal{M} \cong \mathcal{P} \times \Delta(\mathcal{M})$

dla wygody zapisu elementy klasy $\mathcal{M}$ (skończone multizbiory)

będziemy reprezentować w następujący sposób:

$\{(a_i, k_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ $a_i \in \mathcal{A}$ są

parami różne $k_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (krotność występowania elementu a_i)

Wtedy $\|\{(a_1,k_1), \ldots, (a_n,k_n)\}\|_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{n} k_i \|a_i\|_{\mathcal{A}}$.

Zróbmy bijekcję $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{P} \times \Delta(\mathcal{M})$

$$\psi(\{(a_1,k_1), \ldots, (a_n,k_n)\}) = \left(\{a_i : 2 \nmid k_i\}, \left\{\left(\left(a_i, \left\lfloor \tfrac{k_i}{2} \right\rfloor\right), \left(a_i, \left\lfloor \tfrac{k_i}{2} \right\rfloor\right)\right) : k_i > 1\right\}\right)$$

owa bijekcja zachowuje normę!

Funkcje tworzące izomorficznych klas są równe co daje tezę. □

Intuicja dotycząca funkcji ψ:

multizbiorowi przypisujemy parę: w pierwszym slocie zbiór elementów nieparzystej krotności; do drugiego slotu "wrzucamy resztę" — z pozostałych elementów (po wyrzuceniu każdy ma krotność parzystą) budujemy parę jednakowych multizbiorów (dzieląc krotność każdego elementu na 2).