Def. Niech $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ będzie klasą kombinatoryczną.
Podklasą klasy $\mathcal{A}$ nazywamy klasę $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ spełniającą warunki $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ oraz $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} = \|\cdot\|_{\mathcal{A}} \restriction \mathcal{B}$.

Mówiąc prościej: wybieramy podzbiór uniwersum klasy i na nim zostawiamy funkcję rangi bez zmian.

Uwaga. Jeśli $\mathcal{B}$ jest podklasą $\mathcal{A}$, to $B_n \subseteq A_n$ i konsekwentnie $b_n \le a_n$.

Konstrukcja klasy kombinatorycznej przy użyciu relacji równoważności.
Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą; R – relacją równoważności na $\mathcal{A}$.
Załóżmy że $(\forall s,t \in \mathcal{A})(sRt \to \|s\|_{\mathcal{A}} = \|t\|_{\mathcal{A}})$
(czyli w relacji mogą być tylko elementy o takiej samej randze)
Wtedy na zbiorze klas abstrakcji $\mathcal{A}/_R$ można naturalnie wprowadzić funkcję rangi $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/R}$
Mianowicie
$$\|[s]_R\|_{\mathcal{A}/R} = \|s\|_{\mathcal{A}}.$$

Ta funkcja jest dobrze określona (nie zależy od wyboru reprezentanta)
Ponadto powstała para $(\mathcal{A}/_R, \|\cdot\|_{\mathcal{A}/R})$ stanowi klasę kombinatoryczną, bo
$$|\{[s]_R : \|[s]_R\|_{\mathcal{A}/R} = n\}| \le |\{s \in \mathcal{A} : \|s\|_{\mathcal{A}} = n\}|$$
(bo funkcja $s \mapsto [s]_R$ jest surjekcją)

Dwa trywialne przykłady:
1. $R_1 = \{(x,x) : x \in \mathcal{A}\}$. Wtedy $\mathcal{A}/_{R_1} \cong \mathcal{A}$
2. $R_2 = \{(x,y) : \|x\|_{\mathcal{A}} = \|y\|_{\mathcal{A}}\}$.
Przy założeniu $a_n \neq 0$ mamy $\mathcal{A}/_{R_2} \cong \mathbb{N}$.

Uwaga Powyższa konstrukcja stosuje się często do relacji określonej na klasie $Seq(\mathcal{A})$ bądź jej podklasie.

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą. Klasę podzbiorów $\mathcal{A}$ $Pset(\mathcal{A})$ nazywamy klasę o uniwersum $[\mathcal{A}]^{<\aleph_0} = \{B \subseteq \mathcal{A} : |B| < \aleph_0\}$

Funkcja rangi zadana jest wzorem

$$\|B\|_{Pset(\mathcal{A})} = \sum_{b \in B} \|b\|_{\mathcal{A}}$$

[Klasa $Pset(\mathcal{A})$ jest klasą podzbiorów skończonych klasy $\mathcal{A}$]

Powyższa konstrukcja może być utożsamiona (przez kanoniczny izomorfizm) z $\mathcal{C}'/R$, gdzie $\mathcal{C}' \subseteq Seq(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}'$ jest klasą ciągów różnowartościowych. Ponadto

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) R (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff$$
$$(\exists \sigma \in S_n)(b_1 = a_{\sigma(1)}, b_2 = a_{\sigma(2)}, \dots, b_n = a_{\sigma(n)}).$$

Tw. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą kombinatoryczną oraz $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ $(a_0 = 0)$

Wtedy $$Pset(\mathcal{A})(x) = \prod_{n \geq 1} (1 + x^n)^{a_n} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathcal{A}(x^n)}.$$

d-d.

Zał. na początek, że klasa $\mathcal{A}$ jest skończona

$\mathcal{A} = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$. Niech $S_i = \{s_i\}$ $\|s_i\|_{S_i} = \|s_i\|_{\mathcal{A}}$

Wtedy $Pset(\mathcal{A}) \cong (\mathcal{E} + S_1) \times (\mathcal{E} + S_2) \times \dots \times (\mathcal{E} + S_m)$.

Bijekcja zachowująca normę jest tu kanoniczna (jaki ma wzór?)

Mamy $(\mathcal{E} + S_i)(x) = 1 + x^{\|s_i\|_{\mathcal{A}}}$

i dalej $Pset(\mathcal{A}) = \prod_{s \in \mathcal{A}} (1 + x^{\|s\|_{\mathcal{A}}}) = \prod_{n \geq 1} (1 + x^n)^{a_n}$

grupujemy s o takiej samej randze, $\|s\|_{\mathcal{A}} = n$ spełniają $s \in \mathcal{A}_n$ jest ich a_n

Rozważmy teraz przypadek, gdy $\mathcal{A}$ jest nieskończone.

Z założenia $a_0 = 0$, więc

$$[x^n]\,\mathrm{Pset}(\mathcal{A}) = [x^n]\,\mathrm{Pset}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n) =$$
$$= [x^n]\left(\prod_{i=1}^{n} (1+x^i)^{a_i}\right)$$

Tu oznaczenia $[x^n]B$ oznacza współczynnik przy x^n w funkcji tworzącej B

Zatem $\mathrm{Pset}(\mathcal{A})(x) = \prod_{i\geq 1} (1+x^i)^{a_i}$.

(zbieżność iloczynu po prawej jest formalna.)

Przejdźmy teraz do drugiego wzoru.

$$\ln\left(\prod_{i\geq 1}(1+x^i)^{a_i}\right) = \sum_{i\geq 1} a_i \ln(1+x^i) = \diamond$$

Rozwińmy w szereg funkcję $\ln(1+y)$. Mamy

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k$$

$$\diamond = \sum_{i\geq 1} a_i \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x^i)^k = \{\text{zamieniamy kolejność sumowania}) \quad (x^i)^k = (x^k)^i$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i\geq 1} a_i (x^k)^i =$$

$$= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \mathcal{A}(x^k) \qquad \boxtimes$$

Def. Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą kombinatoryczną. $\mathrm{Mset}(\mathcal{A})$ jest klasą multizbiorów (skończonych) nad $\mathcal{A}$.

$\mathrm{Mset}(\mathcal{A}) = \frac{\mathrm{Seq}(\mathcal{A})}{R}$, gdzie $(a_1, a_2, \dots, a_n)\, R\, (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$\iff \exists \sigma \in S_n \;\; b_1 = a_{\sigma(1)},\ b_2 = a_{\sigma(2)}, \dots,\ b_n = a_{\sigma(n)}$

[Używamy więc tej samej relacji co dla $\mathrm{Pset}(\mathcal{A})$, ale określonej na całej klasie $\mathrm{Seq}(\mathcal{A})$]

Intuicyjnie multizbiór to taka kolekcja obiektów, w której obiekty mogą występować wielokrotnie. Przykładem może być portfel z pieniędzmi.

Tw. Zał. że $\mathcal{A}$ jest klasą kombinatoryczną, $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ $(a_0 = 0)$.
Wtedy
$$\mathrm{Mset}(\mathcal{A})(x) = \prod_{n \geq 1} (1-x^n)^{-a_n} = e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A(x^k)\right)}$$

d-d.

Zaczynijmy od $\mathcal{A}$ skończonego $\mathcal{A} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$
Niech $S_i = \{s_i\}$ S_i podklasa $\mathcal{A}$.
Mamy $\mathrm{Mset}(S_i) \cong \mathrm{Seq}(S_i)$
i dalej $\mathrm{Mset}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Mset}(S_1) \times \mathrm{Mset}(S_2) \times \dots \times \mathrm{Mset}(S_n)$
$\cong \mathrm{Seq}(S_1) \times \mathrm{Seq}(S_2) \times \dots \times \mathrm{Seq}(S_n)$

$$\mathrm{Seq}(S_i)(x) = \frac{1}{1 - S_i(x)} = \frac{1}{1 - x^{\|s_i\|_{\mathcal{A}}}}$$

Zatem
$$\mathrm{Mset}(\mathcal{A})(x) = \prod_{s \in \mathcal{A}} \left(1 - x^{\|s\|_{\mathcal{A}}}\right)^{-1} = \prod_{n \geq 1} (1-x^n)^{-a_n}.$$

Analogicznie jak w przypadku Pset przechodzimy do przypadku nieskończonego.

Drugi wzór. Zlogarytmujmy
$$\ln\left(\prod_{n \geq 1} (1-x^n)^{-a_n}\right) = \sum_{n \geq 1} a_n \ln\left(\frac{1}{1-x^n}\right) = \circledast$$

Rozwijamy $\ln\left(\frac{1}{1-y}\right)$ w szereg

$$\ln\left(\frac{1}{1-y}\right) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{y^k}{k}$$

$$\circledast = \sum_{n \geq 1} a_n \sum_{k \geq 1} \frac{(x^n)^k}{k} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{n \geq 1} a_n (x^k)^n = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} A(x^k). \blacksquare$$

Uwaga. Konstrukcja klasy $MSet(\mathcal{A})$ nawet dla skończonej (niepustej) klasy $\mathcal{A}$ prowadzi do klasy nieskończonej.

Uwaga. Założenie $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ jest istotne. W przeciwnym razie nie otrzymamy klasy kombinatorycznej!

Uwaga. Dla klasy $PSet(\mathcal{A})$ można w założeniu opuścić $\mathcal{A}_0 = \emptyset$. Spowoduje to zmianę funkcji tworzącej.

$$PSet(\mathcal{A}) = \prod_{n \geq 0} (1 + x^n)^{a_n}.$$