Wykładnicze funkcje tworzące

Def. Dla ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wykładniczą funkcją tworzącą nazywamy szereg (formalny) $$\hat{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n .$$

Uwagi 1) Nazwa bierze się stąd, że dla $a_n = 1$ mamy $\hat{A}(x) = e^x$

2) $\hat{A}(x)$ jest "zwykłą" funkcją tworzącą dla $\hat{a}_n = \frac{a_n}{n!}$.

Fakt. Niech $\hat{A}(x)$, $\hat{B}(x)$ będą wykładniczymi funkcjami tworzącymi dla ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wtedy $\hat{A}(x) + \hat{B}(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Def. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami. Wielomianowym splotem tych ciągów nazywamy ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowany wzorem
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} .$$

Tw. Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie wielomianowym splotem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Wtedy $\hat{C}(x) = \hat{A}(x) \cdot \hat{B}(x)$

d-d.
$$\hat{A}(x) \cdot \hat{B}(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{b_l}{l!} x^l\right) =$$
$$= \sum_{k,l\in\mathbb{N}} \frac{a_k b_l}{k!\, l!} x^{k+l} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{N} \\ k+l=n}} \frac{a_k b_l}{k!\, l!} x^n =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k b_{n-k}}{k!\,(n-k)!}\right) x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!} =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \frac{x^n}{n!}$$
i już ☒

Przykład.

Liczby Bella B_n $\qquad B_n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\}$

Inaczej mówiąc B_n to liczba partycji zbioru $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Zachodzi tożsamość

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \qquad (☼)$$

{ Prawą stronę równości możemy zinterpretować tak: wybieramy k-elementowy podzbiór zbioru $[n]$ (może być pusty gdy $k=0$) i dokładamy mu element $n+1$. To jest jeden ze zbiorów naszej partycji. Pozostałe elementy (jest ich $n-k$) dzielimy na B_{n-k} sposobów na rozłączne niepuste zbiory }

Widzimy zatem, że ciąg $(B_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ jest wielomianowym splotem ciągów $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Oznaczmy

$$\hat{B}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} x^n$$

Różniczkując stronami dostajemy

$$\hat{B}(x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n$$

(czyli mamy wykładniczą funkcję tworzącą dla $(B_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$). Ze ☼

$$\left(\hat{B}(x)\right)' = e^x \hat{B}(x)$$

{ e^x to wykładnicza f-cja tworząca ciągu $(1, 1, 1, \dots)$

czyli

$$\frac{\left(\hat{B}(x)\right)'}{\hat{B}(x)} = e^x$$

To równanie (różniczkowe) na funkcję $\hat{B}(x)$.

Całkując stronami dostajemy:

$$\int \frac{\hat{B}'(x)}{\hat{B}(x)}\,dx = \int e^x dx$$

$$\ln|\hat{B}(x)| = e^x + C$$

Aby wyznaczyć stałą C wstawiamy $x=0$.

Mamy $\hat{B}(0) = \frac{B_0}{0!} = 1$, $e^0 = 1$

$\ln 1 = 0 = 1 + C$, czyli $C = -1$

Finalnie

$$\hat{B}(x) = e^{e^x - 1}.$$

Tw. (Wzór Dobińskiego) $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

d-d.

Użyjemy wyprowadzonej właśnie tożsamości $\hat{B}(x) = e^{e^x-1}$.

Mamy

$$\hat{B}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{1}{e} e^{e^x}$$

$$e^x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}, \text{ zatem}$$

$$e^{e^x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{e^{kx}}{k!} = (\heartsuit)$$

Rozwijamy e^{kx} w szereg:

$$(\heartsuit) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(kx)^n}{n!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{k^n x^n}{k!\, n!} = (\bowtie)$$

Zamieniając kolejność sumowania

$$(\bowtie) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^n}{k!} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^n}{k!}\right)}{n!} x^n$$

co daje tezę. $\boxtimes$