Zad. 10 L5.

Tezę udowodnimy przez indukcję względem $n = V(G)$.

Dla $n=1$ $E(G)=0$, $0 \geq 1-1$, czyli O.K.

Załóżmy teraz, że dla pewnego n teza jest prawdziwa.
Ustalmy spójny graf o $n+1$ wierzchołkach.

- Jeśli $\deg v \geq 2$ dla każdego wierzchołka, to
$$E(G) = \frac{1}{2} \sum_{v\in V} \deg v \geq \frac{1}{2} \cdot 2|V| = |V| > |V|-1.$$

- Jeśli istnieje $v \in V$ spełniający $\deg v = 1$, to graf $G' = (V \setminus \{v\}, E')$ $E' = E \cap [V\setminus\{v\}]^2$ jest spójny (ścieżka od w do u (dla $w,u \in V\setminus\{v\}$) w wyjściowym grafie G nie przechodzi przez v, czyli pozostaje ścieżką w G')
Z założenia zatem $|E'| \geq |V\setminus\{v\}| - 1 = |V|-2$
Oczywiście $|E| = |E'|+1$. Stąd teza

$\square$ by ZIM.

Uwaga. Można było użyć argumentu idącego nieco naokoło. Mianowicie: w grafie spójnym można wybrać drzewo rozpinające (dlaczego? jak?). Drzewo o n-wierzchołkach ma $n-1$ krawędzi.