Zad. 11. L4.

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

[Druga i pierwsza nierówność są prawdziwe dla $n \geq 2$.]

Po zlogarytmowaniu stronami dostajemy:

$$\ln\left(e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) < \ln(n!) < \ln\left(ne\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

czyli

$$1 + n\ln n - n < \sum_{k=1}^{n} \ln k < \ln n + 1 + n\ln n - n$$

Zastosujemy teraz zad. 9 L4. Funkcja $\ln : [1, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest rosnąca! Otrzymujemy

$$\ln 1 + \int_1^n \ln x\,dx < \sum_{k=1}^{n} \ln k < \int_1^n \ln x\,dx + \ln n$$

Mamy $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$ (całkujemy oczywiście przez części)

Wstawiamy do pasującego wzoru i już :)

Uwaga. Pierwsza z nierówności daje się też udowodnić używając ZIM (z drugą jest gorzej :( ).