Zad. 17 L2

Pierwsza nierówność $\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k}$ jest dość naturalna.

W istocie:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k = \underbrace{\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{k}}_{k \text{ razy}} \le \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k-1}{k-k-1} = \binom{n}{k}$$

Korzystamy z nierówności $\frac{n}{k}\le\frac{n-i}{k-i}$ dla $i\in\{1,2,\ldots,k-1\}$

równoważnie

$n(k-i)\le k(n-i)$, czyli $ni \ge ki$ co dla $k\le n$ oraz $i\in\{1,2,\ldots,k-1\}$ prawdziwe

Drugą nierówność $\binom{n}{k}\le\left(\frac{ne}{k}\right)^k$ dowiedziemy przez indukcję względem k (tu $k\in\{1,2,\ldots,n\}$).

Dla $k=1$ mamy

$\binom{n}{1}=n$ $\left(\frac{ne}{1}\right)^1 = ne$, więc nierówność zachodzi.

Zał. teraz że nasza nierówność zachodzi dla pewnego k.

Wtedy

$$\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}\underset{\text{z zał. ind.}}{\le}\frac{n-k}{k+1}\left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

Wystarczy tedy pokazać, że $\frac{n-k}{k+1}\left(\frac{ne}{k}\right)^k\le\left(\frac{ne}{k+1}\right)^{k+1}$

Ostatnia nierówność jest równoważna:

$$\frac{1}{k+1}\,\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\le\frac{n^{k+1}\,e^{k+1}}{n^k\,e^k\,(n-k)}$$

Po poupraszczaniu: $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\le\frac{n}{n-k}e$

Ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i zbiega do e. Mamy przeto

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\le e\le\frac{n}{n-k}\cdot e$$ co kończy dowód (by ZIM).