Zad. 4 L4.

Załóżmy, że $n \geq k$ są liczbami naturalnymi.

Niech $f : [n] \longrightarrow [k]$ będzie surjekcją.

f generuje, w sposób kanoniczny, partycję zbioru $[n]$ na k części: $\{ f^{-1}[\{1\}], f^{-1}[\{2\}], \dots, f^{-1}[\{k\}] \}$.

Z drugiej strony, mając partycję zbioru $[n]$ na k części możemy z niej stworzyć $k!$ surjekcji z $[n]$ na $[k]$. (Trzeba elementom partycji przypisać wartości funkcji.)

Bardziej formalnie:

Niech $P_{k,n}$ będzie zbiorem partycji $[n]$ na k części

S_k – zbiór permutacji $[k]$

$S_{n,k}$ – zbiór surjekcji z $[n]$ na $[k]$.

Zrobimy bijekcję $\varphi : P_{k,n} \times S_k \longrightarrow S_{n,k}$

Niech $\mathcal{A} \in P_{k,n}$. Wtedy $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$,

gdzie $\min A_1 < \min A_2 < \dots < \min A_k$.

Ustalmy $\sigma \in S_k$. Zdefiniujmy $f = \varphi(\mathcal{A}, \sigma)$:

$$f(i) = j \iff i \in A_{\sigma(j)} .$$

Pokazaliśmy zatem, że $|S_{n,k}| = |P_{k,n} \times S_k| = |P_{k,n}| \cdot |S_k| =$

$$= \left\{ {n \atop k} \right\} k!$$

Scanned by TapScanner