
Rozwiązanie zadania 89. z Logiki i struktur formalnych 22/23

Zadanie 89. Niech $(A_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ będzie indeksowaną rodziną zbiorów. Pokaż, że

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} .$$

Rozwiązanie: Weźmy dowolny x . Wtedy

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)} &\equiv (\exists f \in J^I) (\forall i \in I) x \in A_{i,f(i)} \rightarrow (\forall i \in I) (\exists f \in J^I) x \in A_{i,f(i)} \\ &\rightarrow (\forall i \in I) (\exists j \in J) x \in A_{i,j} \equiv x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} . \end{aligned}$$

Niech teraz $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$ i $A_i(x) = \{j \in J : x \in A_{i,j}\}$. Wtedy $\mathcal{A}(x) = \{A_i(x) : i \in I\}$ jest rodziną niepustych zbiorów. Wobec tego istnieje pewien jej selektor, który wybiera z każdego ze zbiorów po jednym elemencie. W ten sposób selektor wyznacza nam pewną funkcję $f : I \rightarrow J$ (tzn. pamiętając, że $(\forall i \in I) A_i(x) \subset J$, mamy $(\forall i \in I)(\exists! j \in A_i(x)) f(i) = j$). Zatem funkcja f spełnia warunek: $(\forall i \in I) x \in A_{i,f(i)}$. Wobec tego, literalnie, istnieje $f \in J^I$ (którą wręcz wskazaliśmy), że dla wszystkich $i \in I$, $x \in A_{i,f(i)}$, co z kolei jest równoważne z $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$.

Zatem z aksjomatu ekstensjonalności otrzymujemy równość dwóch zbiorów.

Uwagi: W rozwiązaniu wykorzystaliśmy milcząco pewne warianty zadań 57. i 60.

W rozwiązaniu skorzystaliśmy również z aksjomatu wyboru. Po prawdzie, nie jest on tu niezbędny. Miast niego, można nieco zmodyfikować powyższe rozwiązanie, aby pracować na inkluzach i operacjach mnogościowych.

Warto porównać to zadanie z podpunktami 2. oraz 4. z zadania 23.