Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2022/23

LABORATORIUM 2

Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe

Termin realizacji: **4. zajęcia**

Warunek zaliczenia listy: *realizacja co najmniej trzech spośród zadań 1–5 (wraz ze sprawozdaniem).*

Uwaga: W każdym z poniższych zadań należy uogólnić metodę rozwiązania, tj. oddzielić model od danych tak, aby można było zadawać dane w pliku, na podstawie których solver będzie generował egzemplarz problemu i go rozwiązywał. Należy także maksymalnie sparametryzować zapis modelu.

Zadanie 0.
Przeczytaj opis języka `GNU MathProg` (lub np. pakietu `JuMP` z języka `Julia`) i zapoznaj się z jego możliwościami.

Zadanie 1. [3 pkt]
Pewne przedsiębiorstwo lotnicze musi podjąć decyzję o zakupie paliwa do samolotów odrzutowych, mając do wyboru trzech dostawców. Samoloty tankują paliwo regularnie na czterech lotniskach, które obsługują.

Firmy paliwowe poinformowały, że mogą dostarczyć następujące ilości paliwa w nadchodzącym miesiącu: Firma 1 – 275 000 galonów, Firma 2 – 550 000 galonów i Firma 3 – 660 000 galonów. Niezbędne ilości paliwa do odrzutowców na poszczególnych lotniskach są odpowiednio równe: na lotnisku 1 – 110 000 galonów, na lotnisku 2 – 220 000 galonów, na lotnisku 3 – 330 000 galonów i na lotnisku 4 – 440 000 galonów.

Koszt jednego galonu paliwa (w $) z uwzględnieniem kosztów transportu dostarczonego przez poszczególnych dostawców kształtuje się na każdym z lotnisk następująco:

	Firma 1	Firma 2	Firma 2
Lotnisko 1	10	7	8
Lotnisko 2	10	11	14
Lotnisko 3	9	12	4
Lotnisko 4	11	13	9

Wyznacz plan zakupu i dostaw paliwa na lotniska, który minimalizuje koszty. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

(a) Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?
(b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?
(c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

Zapisz model programowania liniowego w wybranym języku i rozwiąż go za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

Zadanie 2. [3 pkt]
Dana jest sieć połączeń między n miastami reprezentowana za pomocą skierowanego grafu $G = (N, A)$, gdzie N jest zbiorem miast (wierzchołków), $|N| = n$, A jest zbiorem połączeń między miastami (łuków), $|A| = m$. Dla każdego połączenia z miasta i do miasta j, $(i, j) \in A$, dane są koszt przejazdu c_{ij} oraz czas przejazdu t_{ij} (im mniejszy koszt, tym dłuższy czas przejazdu). Dane są również dwa miasta i°, $j^\circ \in N$.

Celem jest znalezienie połączenia (ścieżki) między zadanymi dwoma miastami, którego całkowity koszt jest najmniejszy i całkowity czas przejazdu nie przekracza z góry zadanego czasu przejazdu T.

(a) Zapisz model programowania całkowitoliczbowego w wybranym języku. Rozwiąż własny egzemplarz problemu ($n \geqslant 10$) za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

(b) Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Sprawdź, jakie będą wartości zmiennych decyzyjnych, jeśli usuniemy ograniczenie na ich całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego).

(c) Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie jest akceptowalnym rozwiązaniem?

Zadanie 3. [3 pkt]
Zapisz model dla zadania 3. z Listy 2 na ćwiczenia w wybranym języku i rozwiąż go dla podanych tam danych za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

W opisie rozwiązania przedstaw optymalny przydział radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy oraz podaj całkowitą liczbę wykorzystywanych radiowozów.

Zadanie 4. [3 pkt]
Pewna firma przeładunkowa posiada teren, na którym składuje kontenery z cennym ładunkiem. Teren podzielony jest na $m \times n$ kwadratów. Kontenery składowane są w wybranych kwadratach. Zakłada się, że kwadrat może być zajmowany przez co najwyżej jeden kontener. Firma musi rozmieścić kamery, żeby monitorować kontenery. Każda kamera może obserwować k kwadratów na lewo, k kwadratów na prawo, k kwadratów w górę i k kwadratów w dół. Kamera nie może być umieszczona w kwadracie zajmowanym przez kontener.

Zaplanuj rozmieszczenie kamer w kwadratach tak, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę oraz liczba użytych kamer była jak najmniejsza.

Zapisz model programowania całkowitoliczbowego w wybranym języku. Rozwiąż własny egzemplarz problemu ($m, n \geqslant 5$; rozwiązania dla $\geqslant 2$ różnych wartości parametru k) za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

Zadanie 5. [3 pkt]
Zakład może produkować cztery różne wyroby P_i, $i \in 1, 2, 3, 4$, w różnych kombinacjach. Każdy z wyrobów wymaga pewnego czasu obróbki na każdej z trzech maszyn. Czasy te są podane w poniższej tabeli (w minutach na kilogram wyrobu). Każda z maszyn jest dostępna przez 60 godzin w tygodniu. Produkty P_1, P_2, P_3 i P_4 mogą być sprzedane po cenie, odpowiednio, 9, 7, 6 i 5 \$ za kilogram. Koszty zmienne (koszty pracy maszyn) wynoszą, odpowiednio, 2 \$ za godzinę dla maszyn M_1 i M_2 oraz 3 \$ za godzinę dla maszyny M_3. Koszty materiałowe wynoszą 4 \$ na każdy kilogram wyrobu P_1 i 1 \$ na każdy kilogram wyrobu P_2, P_3 i P_4. W tabeli podany jest także maksymalny tygodniowy popyt na każdy z wyrobów (w kilogramach).

Produkt	Maszyna			Maksymalny popyt tygodniowy
	M_1	M_2	M_3	
P_1	5	10	6	400
P_2	3	6	4	100
P_3	4	5	3	150
P_4	4	2	1	500

Wyznacz optymalny tygodniowy plan produkcji poszczególnych wyrobów i oblicz zysk z ich sprzedaży.

Zapisz model programowania liniowego w wybranym języku i rozwiąż go za pomocą solvera `GLPK` (lub np. `Cbc`).

Rozwiązania problemów z zadań 1–5 przedstaw w zwięzłym sprawozdaniu (plik pdf), które powinno zawierać:

1. opis modeli
   (a) definicje zmiennych decyzyjnych (opis, jednostki),
   (b) ograniczenia (nie umieszczaj źródeł modelu),
   (c) funkcja celu,
2. krótki opis rozwiązywanych egzemplarzy, uzyskane wyniki oraz ich interpretację.

W sprawozdaniu do opisu modeli (zmienne, ograniczenia, funkcja celu) **należy zastosować zapis matematyczny** (a nie zapis w wybranym języku modelowania)!

Do sprawozdania należy dołączyć pliki z modelami programowania liniowego lub całkowitoliczbowego. Pliki powinny być skomentowane – powinny zawierać imię i nazwisko autora, komentarze zmiennych, zaetykietowane ograniczenia oraz komentarze ograniczeń.