

Lista zadań

Algorytmiczna Teoria Gier 2023/24

25 stycznia 2024

1 Topologia i analiza wypukła

Zadanie 1. Które z następujących zbiorów są zupełne w $\mathbb{R}$ ze standardową topologią i dlaczego? $(0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1]$, $\mathbb{Q}$

Zadanie 2. a) Pokaż, że w przestrzeni X z metryką dyskretną $d(x, y) = \mathbb{I}[x \neq y]$ (w notacji Iwersona), każdy zbiór jest jednocześnie otwarty i domknięty.

Wsk. Pokaż najpierw, że singletony są zbiorami otwartymi.

b) Sprawdź, czy ta przestrzeń jest zupełna.

c) A zwarta?

Zadanie 3. Udowodnij tw. Banacha o kontrakcji.

Wsk. Przeczytaj szkic dowodu z wykładu.

Zadanie 4. a) Podaj ciąg zbieżny do rozwiązania równania: $\cos(x) = 2x$, w przedziale $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Wsk. Znajdź odpowiednią kontrakcję.

b) Który element ciągu na pewno będzie różnił się mniej niż 10^{-9} od rozwiązania?

Zadanie 5. Niech D będzie zbiorem wszystkich dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa $(\pi_i)_{i=1}^k$ na $[k]$. Pokaż, że jest to sympleks. Ile ma wymiarów?

Wsk. Można zacząć od przypadków $k = 2$ i $k = 3$.

2 Wstęp do teorii gier

Zadanie 6. Kubuś Puchatek chce gdzieś usiąść i jeść miodek, co w jego uznaniu jest warte 4 punkty przyjemności. Natomiast Tygrysek chce pofikać przy wielkich głazach w Stumilowym lesie, co dałoby mu 6 punktów przyjemności. Niestety oboje tracą 3 punkty przyjemności, jeśli wykonują jakieś czynności samotnie. Wszyscy przyjaciele Kubusia i Tygryśka ciężko pracują, ale zarówno Tygrysek, jak i Puchatek tracą po 7 punktów przyjemności, jeśli pracują. Kubuś lubi fikać i dostarcza mu to 2 punkt przyjemności, a Tygrysek trochę lubi miodek, bo daje mu to 1 punkt przyjemności. Zapisz powyższą grę dla $P = \{\text{Puchatek}, \text{Tygrysek}\}$ w postaci macierzowej.

Czy jesteśmy w stanie przedstawić w postaci macierzowej grę, w której dodamy gracza „wszyscy przyjaciele Kubusia i Tygryśka”?

Zadanie 7. Czy podane gry mają własność sumy stałej lub zerowej?

(a)

	s_2	a	b
s_1			
A	2	-2	-1
B	-1	1	-3

(b)

		s_2		a	b
		s_1			
A				1	-2
				-2	4
B				-1	2
				2	-4

(c)

		s_2		N	P
		s_1			
P				1	2
				-2	-5
N				0	-1
				1	4

(d) Szachy (czy umiesz je przedstawić w postaci macierzowej?),

(e) Kółko i krzyżyk,

(f) Kamień, papier, nożyce (znajdź postaci macierzowe dla 2 oraz 3 graczy).

Zadanie 8. Pokaż, że każda gra o sumie zerowej jest grą o sumie stałej.

Zadanie 9 (von Neumann, Morgenstern). Pokaż, że każda nietrywialna gra n -osobowa o sumie niezerowej jest równoważna z $(n + 1)$ -osobową grą o sumie zerowej.

Zadanie 10. Jedna pinta Gueze kosztuje 20zł, ale w promocji każde dwie kosztują 34 zł. Andrzej uważa, że Gueze jest warte 19zł, natomiast Zbigniew, że 18zł. Jak dużo piw powinni kupić, jeśli oboje chcą się napić co najmniej po pincie, Andrzej może wypić co najwyżej 3 pinty, a Zbigniew co najwyżej 4?

a) Sporządź odpowiednią dwu-macierz wypłat.

b) Które strategie graczy ściśle dominują pozostałe?

c) Czy strategia wypicia 2 piw przez Zbigniewa słabo dominuje którąś z pozostałych jego strategii?

d) Jaka jest najlepsza odpowiedź dla Andrzeja na wypicie 3 piw przez Zbigniewa?

e) Jaka jest równowaga Nasha w strategiach czystych?

f) Jakie jest optimum Pareto?

g) Który profil strategii jest najlepszy?

Zadanie 11. Rozwiąż poniższe gry korzystając z algorytmu eliminacji strategii zdominowanych. Czy rozwiązanie zależy od kolejności eliminacji strategii? Czy stosując ten algorytm można wyeliminować punkt równowagi Nasha w strategiach czystych?

(a)

		s_2		a	b
		s_1			
A				0	1
				3	2
B				1	0
				2	1

(b)

		s_2			a	b	c
					s_1		
A							
B							

(c)

		s_2		a	b
		s_1			
A				0	1
				0	2
B				2	2
				3	1

Zadanie 12. Podaj wszystkie czyste równowagi Nasha. Zaznacz pary strategii, które są optymalne w sensie Pareta.

(a)

		s_2		a	b
		s_1			
A				3	7
				2	-2
B				-5	-1
				6	0

(b)

		s_2		a	b
		s_1			
A				3	7
				2	-2
B				-5	5
				6	3

Zadanie 13. Poniższa gra opisuje arbitralną ocenę sytuacji w okresie Zimnej Wojny. Każdy z graczy ma dwie opcje: P — produkować broń nuklearną, N — nie produkować broni nuklearnej.

		s_{ZSRR}		P	N
		s_{USA}			
P				1	2
				3	2
N				4	3
				4	1

Podaj czyste równowagi Nasha. Która z równowag jest bardziej prawdopodobna? Która była wykorzystana w rzeczywistości?

Zadanie 14 (TCP Backoff game). Dwie osoby p_1, p_2 komunikują się przy pomocy wybranych spośród dwóch dostępnych protokołów TCP, przy czym jeden jest Poprawny, a drugi ma Niezaimplementowany Backoff mechanism ($S_1 = S_2 = \{P, N\}$). Jaki to typ gry?

		s_2		P	N
		s_1			
P				-1	0
				-1	-4
N				-4	-3
				0	-3

Rysunek 1: Opóźnienie protokołu TCP $u_1 \setminus u_2$ w sekundach w postaci macierzowej.

Uwaga 1. Jest to przykład macierzy zysków (gdy wypłaty są niedodatnie, jak tutaj, to z reguły podaje się macierz kosztów).

Jakie są czyste równowagi Nasha dla tej gry? A jakie optima Pareta?

Zadanie 15. Znajdź czystą równowagę Nasha dla poniższej gry. Czy jest ona „bezpieczna”? Jak zagrają rozsądni gracze?

		s_2			L	M	R
		s_1					
U					2	3	-100
					1	0	2
D					1	-10	3
					-20	1	3

Zadanie 16 (Tragedy of commons). Pewien ojciec miał dwóch synów. Zostawił im w spadku 100 talentów. Testament jest następujący: Każdy z synów musi jednocześnie podać liczbę talentów t_i ($i \in \{1, 2\}$), którą chce otrzymać w spadku. Jeśli $t_1 + t_2 \leq 100$, to każdy z synów otrzymuje tyle talentów o ile poprosił, a reszta talentów zostaje przekazana potrzebującym. Jeśli natomiast $t_1 + t_2 > 100$, to wszystkie 100 talentów zostanie rozdane potrzebującym, a synowie nie otrzymają nic. Każdy z synów troszczy się tylko o swoją część spadku. Podaj wszystkie czyste równowagi Nasha. Jak wyglądają optima Pareta? Czy potrzebujących można uznać za trzeciego gracza?

Zadanie 17. Każdy z dwóch kandydatów na prezydenta musi zdecydować, o której godzinie chce wygłosić swoje obligatoryjne przemówienie przedwyborcze w TVP. Każdy z nich może wybrać jeden z 3 dni przed niedzielnymi wyborami: środę, czwartek lub piątek. Jeśli zdecydują się wygłosić przemówienia w tym samym dniu, to żaden z nich nie przekona do siebie nowych wyborców. Jeśli wybiorą różne dni, to przewagę zdobywa ten, którego przemówienie było bliżej dnia wyborów. Jeśli przemówienia były kolejnych dniach, to późniejszy z nich przekona do siebie 30% obecnie niezdecydowanych. Jeśli wygłoszą przemówienia w środę i piątek, to piątkowy mówca przekona 50% obecnie niezdecydowanych. Przedstaw powyższą grę w postaci macierzowej. Jakie strategie czyste powinni wybrać kandydaci?

Zadanie 18 (* domowe; 6pkt; do 9.11.23). Za siedmioma górami, za siedmioma pustyniami, w królestwie zwierząt, król Skaza i kandydat na króla – Simba, biorą udział w pisemnym konkursie. Podług bardzo rzetelnego obserwatora tj. Drzewa Życia, Skaza powinien dostać 49 punktów, a Simba – 51. Niestety, obserwator nie jest obywatelem królestwa zwierząt i nie może wybierać za nich. Dlatego o wygraniu konkursu mają zadecydować średnie oceny kandydatów dokonanywane przez zwierzęcych wyborców. Wygrywa ten kandydat, który osiągnie większą średnią ocen wśród wyborców. Wiadomo, że 15% zwierząt jest inteligentne. Podobnie, 15% zwierząt jest nierozsądnych. Pozostałe zwierzęta nazwijmy przeciętnymi. Wiadomo, że wariancje ocen dokonywanych przez zwierzęcych wyborców różnią się tylko ze względu na powyższą klasyfikację inteligencji. Dla inteligentnego zwierzęcia, błąd popełniany względem oceny Drzewa Życia to zmienna losowa o rozkładzie zgodnym z X , dla przeciętnego – ze zmienną Y , a nierozsądnego – ze zmienną Z . Zakładamy, że X, Y, Z mają niezależne rozkłady normalne, o wspólnej średniej 0, oraz wariancjach: $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 4$ i $\text{Var}(Z) = 9$, a ponadto wiemy, że wszystkie zwierzęta każdą ocenę przeprowadzają niezależnie od innych ocen (także tych innych zwierząt).

Początkowo tylko 10 zwierząt wie o wyborach i planuje oceniać prace kandydatów. Są wśród nich 2 zwierzęta inteligentne, 6 przeciętnych i 2 nierozsądne.

- Niech $N_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1)$, $N_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2)$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Jaki rozkład ma $N_1 + N_2$?
- Jakie rozkłady mają zmienne opisujące sumy ocen od 10 początkowych wyborców (liczone osobno dla Skazy i Simby)? A jaki rozkład ma różnica tych sum?
Jaki rozkład ma różnica średnich ocen dla poszczególnych kandydatów?

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wskazanych 10 wyborcach, Skaza wygra wybory (będzie miał większą średnią ocen)?

Wskazówka: Znormalizuj odpowiednią zmienną i sporzystaj z tablicy dystrybucyj standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Kapituła konkursowa rozważa kilka strategii reklamy wyborów, aby zwiększyć liczbę wyborców. Liczbę nowych wyborców danego typu w zależności od wybranego typu reklamy, przedstawia poniższa tabela:

Reklama	brak	hieny	poczta Zazu	zebranie u Rafikiego
Inteligentne	+0	+0	+3	+9
Przeciętne	+0	+10	+12	+1
Nierozsądne	+0	+10	+5	+0

Ponadto Skaza ma dwie strategie: przekonać 5 nowych nierozsądnych wyborców albo nie mówić nikomu więcej o wyborach.

Wypłata Skazy to prawdopodobieństwo wygrania konkursu przez niego, a Kapituły (reprezentującej całe królestwo zwierząt) – prawdopodobieństwo wyborów zgodnych z rzetelną oceną Drzewa Życia (czyli wygranej Simby).

Przedstaw grę między Skazą, a Kapitułą w postaci macierzowej (jedna komórka wynika z poprzedniego podpunktu).

- Znajdź równowagi Nasha dla tej gry.
- Co charakteryzuje grupę, która zwiększa uczciwość wyborów?

PS Zadanie zainspirowane m.in. wierszem Ewy Lipskiej pt. „Egzamin”.

Zadanie 19. Pokaż, że dla dowolnego gracza, (słaba) dominacja w sensie strategii czystych jest relacją częściowego porządku.

Zadanie 20 (Uproszczone Rzuty Karne). Napastnik (p_N) strzela karnego w lewo albo w prawo ($S_N = \{L, P\}$), a bramkarz (p_B) jednocześnie rzuca się w lewo albo w prawo ($S_B = \{L, P\}$). Jeśli bramkarz wybierze ten sam róg co piłkarz, to broni strzał, a jeśli nie, to przepuszcza gola. Zaproponuj postać macierzową dla tej gry. Czy jest to gra o sumie zerowej? Czy ta gra ma równowagi skorelowane? Jaki to typ gry?

Zadanie 21 (Routing). Dwa pakiety p_1, p_2 zostały wysłane do sieci z tego samego punktu O . Sieć odbiera pakiety albo od węzła A albo od B . Opóźnienia przez punkt A są mniejsze, o ile nie wysyłane są przez nie dwa pakiety naraz. Zaproponuj macierz wypłat dla tej gry. Jaki to typ gry? Czy ta gra ma równowagi skorelowane?

Zadanie 22 (Gra w cykora (Chicken Dilemma)). Dwóch pilotów p_1, p_2 lecą naprzeciw siebie; każdy w stronę tego drugiego. W ostatnim możliwym momencie decydują się by uniknąć zderzenia lub nie ($S_1 = S_2 = \{\text{Unik}, \text{Wprost}\}$). Jeśli żaden nie zrobi uniku, to się zderzą i oboje zginą. Pilot, który zrobi unik, traci honor. Jeżeli jeden z nich poleci na wprost, wygrywa. Zaproponuj macierz wypłat dla tej gry. Jaki to typ gry? Czy ta gra ma równowagi skorelowane?

Zadanie 23 (ISP). Usługodawcy internetowi p_1, p_2 mają za zadanie skomunikować swoich użytkowników $A \in p_1$ i $B \in p_2$ z routerem K na granicy p_1 i p_2 . Każdy z nich może albo wysyłać pakiety wewnątrz swoich sieci przez router pośredniczący albo zrzucić przesył na konkurencyjnego usługodawcę (zarówno A , jak i B znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie routera pośredniczącego P , leżącego na granicy p_1 i p_2). Koszt danego usługodawcy, to liczba przeskoków pakietów do sąsiednich routerów wewnątrz sieci danego usługodawcy.

1. Napisz macierz kosztów dla tej gry. Jakiego typu jest ta gra?
2. Jaka jest równowaga Nasha, a jakie optimum Pareto dla tej gry?
3. Jaka jest równowaga skorelowana?

Zadanie 24 (Covid). Państwa rozważają wprowadzenie obostrzenia Covidowych. Wprowadzenie ich kosztuje państwo 10mln dolarów. Natomiast każde państwo musi ponieść dodatkowe koszty 1mln dolarów na służbę zdrowia za każde państwo, które nie wprowadzi obostrzeń.

- a) Jaki to typ gry?
- b) Ile różnych strategii jest w grze Covid dla n państw?
- c) Jakie są optima Pareto i czyste równowagi Nasha dla tej gry?
- d) Czy istnieją strategie skorelowane?

Zadanie 25. Czy każde rozwiązanie dominujące w ścisłym sensie jest optimum Pareta?

Zadanie 26 (* domowe; 5pkt; do 16.11.23). Trzy małe świnki mieszkają w trzech własnoręcznie wybudowanych budynkach. Każde dwie — mieszkają w odległości $\sqrt{3}\text{km}$ od siebie. Chciały zamontować alarm przeciw-wilkowy. Mają jedną czujkę, która ma zasięg wykrywania wilków do 2km . Każda świnka musi kupić kabel (niezależnie od siebie), który połączy jej domek z czujką. Kilometr kabla kosztuje 1. Jeśli wszystkie świnki kupią co najmniej 1km kabla, to umieszczają czujkę idealnie pośrodku trójkąta utworzonego przez domy świnek. Jeśli któraś świnka kupi mniejszą długość kabla, to czujkę stawiamy możliwie jak najbliżej centrum trójkąta. Jeśli kabli nie wystarczy, aby połączyć wszystkie 3 świnki z alarmem, to korzystają dwie świnki, które kupiły najdłuższe kable (wszelkie remisy rozstrzygane są w kolejności jakości domków, tj. wygrywa słomiany, potem drewniany i na końcu murowany). W przypadku, gdy można połączyć tylko dwie świnki z czujką, czujka jest stawiana możliwie najbliżej środka odcinka łączącego domy tych dwóch świnek. Jeśli dwie świnki nie mają w sumie kabli o łącznej długości $\sqrt{3}\text{km}$, to świnka, która kupiła najdłuższy kabel, stawia czujkę bezpośrednio przy swoim domu (remisy rozstrzygamy jak wcześniej). Niechroniona (niepodłączona do czujki) świnka musi zapłacić 10 za usługi firmy ochroniarskiej. Każda podłączona do czujki świnka zyskuje trzykrotność minimalnej odległości między jej domem a brzegiem obszaru chronionego przez czujkę.

- a) Dlaczego można uznać, że gra ma ograniczone wypłaty?
- b) Opisz jakie strategie czyste świnek są zdominowane.
- c) Znajdź optima Pareta oraz czyste równowagi Nasha.
- d) Czy istnieje rozwiązanie dominujące dla tej gry?
- e) Jak należałoby zmienić warunki gry, aby móc uznać tę grę za dyskooperatywną?

Zadanie 27. Rozważmy gry dwuosobowe o sumie stałej, w której każdy z graczy ma zbiór strategii czystych S .

- Czy istnieje gra z $|S| = 2$, która ma strategię minimaxową o wartości różnej od wartości dolnej i górnej gry?
- Podaj przykład takiej gry dla $|S| = 3$.

Zadanie 28. Zastosuj metodę minimaxową do Dylematu więźnia.

Zadanie 29. Jak zadziała metoda minimaxowa dla gry w kamień, papier, nożyce?

Zadanie 30. Dwie fabryki z jednakowymi maszynami, które produkują gumowe zwierzątka, rozważają jak podzielić swoją produkcję na gumowe kaczki i gumowe kurczaki. Pobliska hurtownia chce zamówić jak najszybciej po 2 tony obu tych produktów. Każda z fabryk ma 3 strategie: wyprodukować 2 tony jednej z zabawek albo po 1 tonie każdej z nich. Wpłata jest wolumaż sprzedanych zabawek. Jeśli fabryki wyprodukują zbyt wiele zabawek któregoś typu, to sprzedają je proporcjonalnie do wyprodukowanych sztuk tego typu, a potem przestawiają produkcję tak, żeby sprzedać po tyle samo gumowych zabawek spośród brakujących do spełnienia zamówienia sklepu.

- Przedstaw grę w postaci macierzowej. Czy jest to gra o sumie stałej?
- Czy gra posiada czystą równowagę Nasha?
- Zastosuj metodę minimaxową do znalezienia strategii minimaxowych.

Zadanie 31. Zastosuj metodę minimaxową do gier z zadań 11. i 12.

Zadanie 32. Rozważmy grę dwuosobową o sumie zerowej z $u_1(x, y) = x^2 - y^2 = -u_2(x, y)$, gdzie $S_1 = S_2 = [-5, 5]$. Znajdź punkty siodłowe dla tej gry.

Zadanie 33. Rozważmy grę dwuosobową o sumie zerowej z $u_1(x, y) = -(x^2 - 1)(x^2 - 2) + (y^2 - 1)(y^2 - 2) = -u_2(x, y)$, gdzie $S_1 = S_2 = [-10, 10]$. Znajdź strategie bezpieczeństwa dla tej gry.
Wsk. Można zastosować tw. Weierstrassa o osiągnięciu kresów (sprawdź założenia).

Zadanie 34. Znajdź wszystkie mieszane równowagi Nasha w dwóch poprzednich zadaniach.

Zadanie 35. Rozważmy grę o sumie zerowej o $u_1(x, y) = 16(x - y)^2$ dla $S_1 = S_2 = [0, 1]$. Znajdź optymalne strategie i wartość gry.

Zadanie 36. Rozważmy grę o sumie zerowej o $u_1(x, y) = \frac{y^2}{2} - 2x^2 - 2xy + \frac{7x}{2} + \frac{5y}{4}$ dla $S_1 = S_2 = [0, 1]$. Znajdź strategie minimaxowe i wartość gry.

Po pewnym czasie gracz 1 zmienia strategię na zrandomizowaną, używając funkcji gęstości $f(x) = 3x^2$. Czy to dobry pomysł?

Zadanie 37. Podaj wszystkie równowagi Nasha w podanych grach. Narysuj graf najlepszych odpowiedzi.

(a)

		s_2		a	b
s_1	A			0	3
	B			1	0
		6	6	5	0

(b)

		s_2			a	b	c
s_1	A				0	1	0
	B				3	3	3
		5	5	3	-1	-2	2

Zadanie 38. Podaj wszystkie równowagi Nasha w podanych grach.

(a)

		s_2				
s_1	N		M	e	t	a
	u					l
		5	-4	3	2	-1
		-3	7	4	0	1
		3	-6	6	0	3

(b)

		s_2		
		1	2	3
s_1	A	0	3	2
	B	1	2	0

Zadanie 39. Znajdź metodą Williamsa mieszane równowagi Nasha w podanych grach o sumie zerowej.

(a)

		s_2		
		W	C	E
s_1	N	3	5	6
	S	3	2	4

(b)

		s_2				
		K	W	S	O	M
s_1	L	2	5	6	4	5
	P	2	2	4	6	5

(c)

		s_2	
		L	P
s_1	a	1	3
	b	3	2
	c	5	4
	d	4	5

Zadanie 40. Dominik i Kinimod grają w Mikado (japońskie bierki). Dominik zawsze zbiera część spośród 20 patyczków, a Kinimod zbiera resztę. Dominik stosuje strategie: a i b, a Kinimod strategie: ara, bak, car i dok. Między ich strategiami zachodzi następująca zależność wypłat: Dominik ma 4 patyczki przewagi za każdą literę w nazwie strategii Kinimoda, która jest różna od nazwy strategii Dominika, ale za to traci 16 przewagi, jeśli nazwa strategii Kinimoda jest ananitem, który nie jest palindromem (słowem, które czytane wspak jest poprawnym słowem w języku polskim, ale innym od wyjściowego (np. arak jest ananitem słowa kara, a kajak jest palindromem)). Narysuj macierz wypłat Dominika. Skorzystaj z metody Williamsa do wyznaczenia równowag Nasha w tej grze.

Zadanie 41 (* domowe; na 7pkt; do 24.12.23).

- Pokaż, że skończony produkt zbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych jest zwarty (w topologii produktowej).
- Pokaż, że skończony produkt zbiorów wypukłych w przestrzeniach liniowych jest wypukły (w sumie prostej przestrzeni liniowych).
- Niech (S, d_S) i (I, d_I) będą skończonymi przestrzeniami z topologiami dyskretnymi. Pokaż, że każda funkcja $f : S \rightarrow I$ jest ciągła (tj. przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego jest otwarty).
- Rozważmy przykład Natarczywego Adoratora (NA) z wykładu. Podaj wszystkie równowagi Nasha.
- Czy funkcje wypłat u_i w grze NA są wklęsłe ze względu na $s_i \in S_i$ (przy ustalonych $s_{-i} \in S_{-i}$)?
- Dla wszystkich profili strategii s , określamy $F(s)$ jako profil strategii, w którym $F_i(s)$ jest zbiorem najlepszych odpowiedzi gracza i na s_{-i} . Czy F ma własność wykresu domkniętego w grze NA?
- Dlaczego gra NA nie ma czystych równowag Nasha?

Zadanie 42. Rozważmy grę różniczkową o sumie zerowej. Każdy z graczy wybiera po jednej funkcji różniczkowalnej i ciągłej o wartościach w $[0, 1]$. Pierwszy wybiera $y(t, x)$, a drugi $z(t, x)$. Dane jest równanie:

$$\frac{dx}{dt} = (y - z)^2, \quad x(0) = x_0 \in [0, 1].$$

Gra kończy się w czasie $t=T$. $u_1(x) = \int_0^T x dt$. Sprawdź, że $\max_{y \in [0,1]} \min_{z \in [0,1]} u_1(x) = x_0 T$, a $\min_{z \in [0,1]} \max_{y \in [0,1]} u_1(x) = x_0 T + \frac{1}{8} T^2$.

Zadanie 43. Znajdź równowagę skorelowaną, która daje wypłatę $(\frac{40}{9}, \frac{36}{9})$ w grze:

		s_2		a	b
		s_1			
A				6	7
				6	2
B				2	0
				7	0

Zadanie 44. Dla poniższych gier podaj wszystkie równowagi Nasha i znajdź równowagę skorelowaną, która nie jest w otocze wypukłej równowag Nasha:

a)

		s_2		A	B
		s_1			
A				8	9
				8	4
B				4	1
				9	1

b)

		s_2			A	B	C
		s_1					
A					0	4	2
					0	2	4
B					2	0	4
					4	0	2
C					4	2	0
					2	4	0

Zadanie 45. Pokaż, że dla poniższej gry, gdzie $a, b, c, d \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, istnieje jedna równowaga skorelowana:

		s_2		A	B
		s_1			
A				0	$1 + d$
				1	c
B				1	b
				0	$1 + a$

Co się dzieje, gdy parametry zbiegają do 0?

Zadanie 46. Czy mogą istnieć równowagi skorelowane, które w nośniku mają strategie zdominowane?

Zadanie 47. Czy istnieje równowaga skorelowana, której nośnik nie jest zawarty w nośniku żadnej z mieszanym równowag Nasha? Jeśli tak, podaj przykład. Jeśli nie, udowodnij.

Zadanie 48. Wykorzystując przekształcenia afiniczne, sprowadź macierze z zadania 12. do postaci symetrycznej. Jak zmieniły się równowagi Nasha i optima Pareta?

Zadanie 49. Sprowadź przy pomocy przekształceń afinicznych ogólną wersję Dylematu Więźnia do postaci symetrycznej, gdzie wypłaty drugiego gracza przy założeniu, że pierwszy milczy to odpowiednio -1 , gdy 2. gracz milczy oraz 0 , jeśli „sypie”. Znajdź strategię skorelowaną, która nie jest równowagą Nasha, dla otrzymanej wersji Dylematu Więźnia. Czy umiesz opisać przestrzeń wszystkich równowag skorelowanych dla tej gry?

Zadanie 50. Które z gier z zadań 37. i 38. są generyczne?

Zadanie 51. Farmerzy McDonald i Karol Borsuk chcą podzielić 5-kątną ziemię $OPQRS$ na 4 części, gdzie $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (2,1)$, $R = (1,1)$, $S = (0,2)$. Każdy z farmerów ma strategię z przestrzeni $S_M = S_{KB} = [0,1]$ Ich strategie czyste to wybory odpowiednio współrzędnej x oraz y , wzdłuż której każdy z nich stawia płot przez cały obszar $OPQRS$. McDonald dostaje ziemię z punktami P i S , a Karol, z punktami O i R . Wypłata każdego z graczy to sumaryczne pole działek danego farmera. Znajdź równowagi Nasha, optima Pareta i równowagi skorelowane.

Zadanie 52. Metodą Lemkego—Howsona podaj przykład równowagi Nasha dla gier oraz znajdź wypłaty poszczególnych graczy:

		s_2		a	b
		s_1			
(a)	A		2	3	
	B		1	2	
			4	5	
			6	1	

		s_2			
		s_1			
(b)	A		2	1	0
	B		0	1	2
	C		3	2	4
			0	3	2
			1	2	0
			-1	1	-1

Zadanie 53. Rozwiąż metodą Lemkego—Howsona przykład gry w cykora z wykładu. Których równowag Nasha nie da się uzyskać w ten sposób?

Zadanie 54. Z miasta A do miasta B można dojechać albo przez miasto C albo przez punkt D. Czas przejazdu $t(X, Y)$ między miastami X i Y zależy od ilości samochodów s jadących tą drogą. Załóżmy, że z A do B podróżuje 60 aut. Niech $t(A, C) = t(D, B) = 1 + s$ oraz $t(A, D) = t(C, B) = 51 + \frac{s}{10}$.

- Opisz postać strategiczną tej gry.
- Jakie są równowagi Nasha w tej grze. Jaki jest wtedy czas przejazdu z A do B?
- Starostwo wybudowało drogę jednokierunkową między C, a D., gdzie $t(C, D) = 10 + \frac{s}{10}$. Jakie są teraz równowagi Nasha i czasy przejazdów. Uzasadnij dlaczego.

Zadanie 55. Narysuj drzewo dla gry Matching Pennies, gdzie każdy z graczy rzuca monetą, a obaj chcą wyrzucić to samo.

Zadanie 56. Antek i Bartek grają w grę. Antek ma dwa samoloty: prawdziwy i fałszywy. Wybiera jeden z nich i kładzie zakryty na stole. Bartek decyduje, czy chce użyć lasera, żeby zestrzelić samolot. Antek wtedy odkrywa samolot. Jeśli był prawdziwy, a Bartek użył lasera, to Antek traci 1, a Bartek zyskuje 1. Jeśli był fałszywy, gdy Bartek użył lasera, to Bartek traci 1, a Antek zyskuje 1. Jeśli Bartek nie strzelał, a samolot był prawdziwy, to gra się kończy, a jeśli był fałszywy, to grę powtarzamy, ale za każdym razem podwajamy wypłaty. Narysuj drzewo gry. Podaj macierz wypłat w postaci strategiczne. znajdź optymalne strategie i wartość gry.

Zadanie 57. Borja i Nadja grają w rosyjską ruletkę. Mają 6-strzałowego Colta z jednym załadowanym nabojem. Każdy kładzie po paczce papierosów na stole. Borja może albo dołożyć dwie paczki papierosów na stół i oddać Nadji pistolet albo dodać jedną paczkę i strzelić sobie w głowę, licząc, że w komorze nie znajduje się kula. Jeśli Borja przeżyje, to Nadja ma ten sam wybór, co wcześniej Borja. Jeśli oboje przeżyją, to dzielą się papierosami po połowie. Jeśli przeżyje jedno, to zbiera papierosy ze stołu. Narysuj drzewo gry, podaj czyste strategie graczy i macierz wypłat. Znajdź optymalne strategie i wartość gry.

Zadanie 58. Antek ma trzy karty: Króla, 10 i 2. Antek wybiera jedną kartę i kładzie na stole. Piotr mówi „wysoka” albo „niska”. Piotr odstawia kartę i ją zabiera. Jeśli trafił (Król jest wysoką kartą, a 2 — niską), to wygrywa 3zł od Antka. W przeciwnym razie traci 2 zł. Jeśli Antek wybrał 10, to Piotr zyskuje 2zł, jeśli powiedział „niska”. Jeśli zawołał „wysoka”, to Antek wybiera kolejną kartę. Gra przebiega podobnie jak wcześniej, ale Piotr tym razem zyskuje 1zł od Antka, gdy ma rację, ale traci 3zł, jeśli nie ma racji. Narysuj drzewo gry, podaj czyste strategie graczy i macierz wypłat. Znajdź optymalne strategie i wartość gry.

Zadanie 59 (* zadanie domowe na Święta; na 4punkty (+3punkty ekstra); do 4.01.24).

Podzielmy Ziemię na 24 strefy. Każda między 15 południkami, poczynawszy od południka $22^\circ 30' E$, idąc na wschód. Przykładowo, Rovaniemi ($25^\circ 42' E$), leży w 1. strefie (między $22^\circ 30' E$, a $37^\circ 30' E$). W ostatniej, 24. strefie (między $7^\circ 30' E$, a $22^\circ 30' E$) leży Wrocław ($17^\circ 1' 48'' E$). Wcielasz się w rolę św. Mikołaja. Z każdej z pozostałych 22 stref, wybierz po dwie miejscowości. Masz za zadanie wyruszyć z Rovaniemi na wschód, wraz ze swoim zastępem reniferów tak, aby zakończyć podróż we Wrocławiu. W każdej strefie, masz za zadanie dostarczyć prezent do 1 miasta (w kolejności stref, czyli zaczynasz dostarczanie w Rovaniemi, a kończysz we Wrocławiu). Dostarczenie prezentów do miasta o ludności L , dodaje Tobie do wypłaty $\lfloor \frac{L}{1000} \rfloor$. Dostarczenie prezentów w miejscowości trwa zawsze 15'. Ponadto, w miejscowościach, które leżą na równoleżniku o wartości

większej, bądź równej niż 60° (N lub S), zawsze pada śnieg. W położonych między (30° S, a 30° N, włącznie), nigdy nie pada śnieg, a w pozostałych miejscach pada śnieg z pr. $\frac{1}{2}$ (przykładowo, w Rovaniemi zawsze pada śnieg, a we Wrocławiu tylko w połowie przypadków). Jeśli w danej miejscowości pada śnieg, możesz (nie musisz) w tym mieście poświęcić 15' na ulepienie średniego bałwana ($+ \lfloor \frac{L}{1000} \rfloor$ do wypłaty) albo 30' na ulepienie olbrzymiego bałwana ($+3 \lfloor \frac{L}{1000} \rfloor$ do wypłaty). Niestety, to czy w danym mieście pada, dowiadujesz się dopiero na miejscu. Ponieważ poruszasz się na wschód, to na dostarczenie prezentów, ewentualne ulepienie bałwana i podróż do miasta w kolejnej strefie, możesz wykorzystać dokładnie 75'. Niestety, ponieważ renifery się męczą, to za każdą podróż między kolejnymi strefami tracisz wartość średniej prędkości (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) reniferów między dwoma kolejnymi miastami (przykładowo, jeśli między A, a B jest 1000km, a w A nie lepimy bałwana, to na podróż zostaje nam 1h, czyli tracimy 1000; jeśli byśmy lepił olbrzymiego bałwana w A, to na podróż z A do B pozostałoby nam 30', czyli kosztowałaby nas 2000).

- Znajdź po 2 miasta z każdej z pozostałych 22 stref. Wykorzystaj do znalezienia danych wszystkich 46 miast. Wpisz "coordinates of X" i "population of X" w celu znalezienia lokacji i populacji miasta X oraz "distance between X and Y" do znalezienia odległości między miastami X i Y z kolejnych stref. Dane zestaw w tabeli.
- Znajdź związłą postać gry św. Mikołaja przeciwko „Naturze”.
- Pokaż, która strategia św. Mikołaja jest najlepsza dla tej gry.
- Znajdź optymalną wypłatę.

Można w obliczeniach się wspierać komputerem.

W związku z promocją świąteczną, 6 rozwiązań, które będą prowadziły do najlepszych oczekiwanych wypłat, zostaną nagrodzone nadprogramowymi punktami z aktywności (poza ograniczeniem za aktywność do 25pkt). Najlepsze rozwiązanie otrzyma 3 ekstra punkty, a każde kolejne o 0,5pkt mniej. Kluczowe znaczenie w rozstrzygnięciu konkursu będzie miało podanie konkretnej strategii (jeśli ktoś się pomyli w wyliczeniu wypłaty, to nie zostaje zdyskwalifikowany).

Zadanie 60. Przedstaw protokół Diffiego—Hellmana jako grę w postaci ekstensywnej, gdzie adwersarka Celina nasłuchuje łączę między Alicją, a Bobem i stara się zgadnąć jednobitową wiadomość wysyłaną od Alicji do Boba. Można założyć, że wiadomość Alicji wybiera „natura”. Alicja i Bob zyskują 1, jeśli uda im się dogadać, ale tracą 2, jeśli Celina pozna ich wiadomość.

Zadanie 61 (Ultimatum). Zbyszek ma 3 monety: dwie 1-złotowe i jedną 2-złotową. Rozdziela je na dwa (być może puste stosy).

- Następnie Agnieszka zabiera 1 stos, a Zbyszek ten, który pozostał. Przedstaw tę grę w postaciach: ekstensywnej i strategicznej.
- Następnie Zbyszek zamyka oczy i Agnieszka zamienia stosy z pr. $\frac{1}{2}$. Zbyszek podaje, czy woli lewy, czy prawy stos (z zamkniętymi oczami).

Znajdź równowagę doskonałą w każdym z dwóch przypadków.

Zadanie 62. Andrzej rozdziela 7 cukierków na trzy niepuste stosy. Następnie Bartek zabiera cukierki z jednego ze stosów. Potem, z jednego z pozostałych 2 stosów, Andrzej zabiera wszystkie cukierki poza jednym. Pozostałe cukierki zabiera Zosia. Rozpisz grę w postaci ekstensywnej i znajdź równowagę doskonałą.

Zadanie 63 (* dodatkowe; na 2pkt; do 25.01.24). Dawid i Ewa zrobili zakład — kto więcej razy nie przyjdzie na 3 ostatnie wykłady z algorytmicznej teorii gier, dostaje od drugiej osoby 10zł. Nie wiedzą o sobie nawzajem, kto przyjdzie na najbliższy wykład. To dopiero okazuje się na miejscu (po każdym wykładzie oboje wiedzą kto przyszedł na dany wykład). Uznali, że tracą po 3zł za każdą nieposiadaną stronę notatek, i że kserują notatki tylko od siebie nawzajem, płacąc drugiej osobie po 1zł za stronę. Jeśli obojga nie było, każde traci. Rozpisz tę grę w postaci ekstensywnej, jeśli wiadomo, że na kolejnych 3 wykładach Dawid potrzebowałby odpowiednio 4, 3 i 5 stron, żeby zrobić notatki, a Ewa tak samo, z wyjątkiem ostatniego wykładu, gdzie potrzebowałaby 6 stron. Znajdź równowagę doskonałą.

Zadanie 64. Dwóch graczy chce nabyć obraz N. Endzy „Iroz patrzy”. Wiadomo, że licytować można tylko za wartość ze zbioru $\{100, 200, 300, 400, 500\}$. Ponadto $v_1 = 400$, a $v_2 = 300$. Kto poda wyższą stawkę, kupuje przedmiot za cenę p , będącą średnią ich ofert. Jeżeli obaj podają cenę p , to zwycięzca jest losowany jednostajnie. Podaj macierz wypłat. Znajdź równowagę Nasha.

Zadanie 65 (Awantura o kasę). W grze udział biorą 3 drużyny. Niebiescy, Żółci i Zieloni. Wszystkie drużyny zaczynają z kwotą 5000zł. W każdej rundzie (maksymalnie 6.) kapitanowie drużyn licytują pytanie. Prowadzący – Krzysztof – pobiera 200zł z konta każdej drużyny i słucha kapitanów. Można licytować wielokrotności 100zł. Aby przebić przeciwników trzeba podać wyższą kwotę. W momencie, gdy kapitan którejś drużyny krzyknie „Va banque”, drużyna natychmiastowo wygrywa licytację (o ile ich saldo jest większe od obecnej najwyższej wartości). Wszystkie licytowane pieniądze trafiają do puli pytania. Gdy drużyna, która wygrała licytację, odpowie poprawnie, to zgarnia całą pulę. Jeśli nie, to kwota przechodzi do puli następnej rundy (po 6. rundzie przechodzi do drużyny z największym saldem). Jeśli drużyna ma mniej, niż 300zł, to Krzysztof uzupełnia ich saldo do kwoty 300zł.

W pierwszej rundzie Zieloni wylicytowali 4700zł, Żółci — 4500zł, a Niebiescy — 4300zł, ale drużyna Zielonych nie odpowiedziała poprawnie, więc 14000zł przeszło do puli drugiej rundy. Wiadomo, że kapitan Zielonych licytuje najszybciej, a Niebieskich — Najwolniej (ale różnice są minimalne tak, że jak ktoś podejmie decyzję, że w tej chwili nie licytuje, gdy ktoś inny zdecyduje się na licytację, to nie zdąży zmienić decyzji przed podbicie stawki, tj. decydują w tym samym momencie, czy i jaką kwotę licytują, czy nie licytują aż do momentu zmiany stanu gry. Jeśli nikt nie zaliczytuje, to Krzysztof może zmusić najbogatszych do zaliczytowania 1000zł. Wiadomo, że Zieloni odpowiadają na 60% pytań poprawnie, Żółci — 70%, a Niebiescy — 80%. Narysuj drzewo gry. Jakie są optymalne strategie poszczególnych drużyn?

Zadanie 66. Zdefiniujmy grę o sumie zerowej w postaci EFG. Niech K będzie drzewem binarnym stworzonym z permutacji $(7, 2, 5, 3, 6, 1, 8, 4, 9)$ w kanoniczny sposób, tzn. w korzeniu drzewa jest najmniejsza liczba a w permutacji, a następnie lewe poddrzewo tworzymy analogicznie z części permutacji znajdującej się po lewej stronie od a i prawe poddrzewo z części permutacji znajdującej się po prawej od a . Następnie z drzewa K tworzymy drzewo T , w którym wartości w liściach są wynikiem kolejno dodawań i odejmowań kolejnych liczb znajdujących się na gałęzi od korzenia do danego liścia w drzewie K . Narysuj drzewa K , T oraz zastosuj algorytm alfa-beta do drzewa T (wartości w liściach mają oznaczać wypłatę gracza 1. w grze o sumie zerowej).

Zadanie 67. Rozważmy grę w upadłość spółki z wykładu dla masy upadłościowej $M = 40$ oraz wektora długów $d = (20, 15, 13, 8)$. Rozpisz wszystkie wartości funkcji v_1 i v_2 .

Zadanie 68. Niech $P = \{1, 2, 3, 4\}$. $v(\emptyset) = 0 = v(\{i\})$, $v(\{1, i\}) = 1$, $v(\{i, j\}) = 0$, $v(\{1, i, j\}) = 2$, dla $i, j \in \{2, 3, 4\}$. $v(\{2, 3, 4\}) = 1$ i $v(\{1, 2, 3, 4\}) = 3$.

a) Pokaż, że ta gra jest wypukła.

b) Znajdź wartość Shapleya dla tej gry.

c) Znajdź rdzeń tej gry.

Zadanie 69. Niech $P = \{1, 2, 3, 4\}$. $v(S) = \min\{i, 2\}$, jeśli S posiada i par utworzonych z graczy ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Wykonaj polecenia z poprzedniego zadania dla tej gry.

Zadanie 70. W wyborach do sejmu Zasiadmiogórogradu wzięło udział 5 partii (podano popularne hasła wyborcze i otrzymany odsetek krzesełek):

KOiS Kongres Osłów i Smoczyć — 40% (Równość zwierząt i mitycznych istot!)

PiWa Piwa i Warzywa — 30% (Słyszeliście o republikach bananowych? My zrobimy republikę piwną!)

TD Trzeci Dukt (za bagnem w lewo) — 11% (Bunkrów nie ma, a nie będzie niczego!)

Kw2PB Koty w 2 Prawych Butach — 10% (Każdy kot ma prawo do purrpurowych prawych butów, 2 razy tylu łap, 9 razy tylu żyć i większej ilości snu (niż mają ludzie)!)

GRU Głosiciele Rozbicia Ust — 9% (Jesteśmy wierni (jeszcze tylko 500 mil i będziemy)!)

(Pod progiem wyborczym znalazła się partia KKK — Klan Kamehamehów z Kosmosu, z hasłem: Odjechany w kosmos kaptur i średnia hawajska dla każdego!; wielu wyborców podzielało opinię, że Ci Państwo chyba pomylili bajki) Znajdź indeksy sił Shapleya-Shubika oraz Banzhafa dla problemu szukania koalicji.

Zadanie 71 (* dodatkowe; 4pkt; do 1.02.24). Przeanalizuj skład sejmu RP z dnia zaprzysiężenia premiera. Wyznacz indeksy Banzhafa i Shapleya dla partii i klubów poselskich. Możesz użyć komputera.

Zadanie 72. Wyznacz cenę anarchii dla gry z paradoksu Braessa (górną ścieżką ma koszty x , a potem 1, a dolną 1, a potem x ; koszt krawędzi między środkowymi wierzchołkami z góry na dół wynosi 0). Jak ma się do ceny anarchii wyznaczona dla przykładu Pigou?

Zadanie 73. Znajdź cenę anarchii dla gry Pigou ze zmienionym kosztem krawędzi z ax na $ax + b$. Jak się zmienia w stosunku do ceny anarchii w oryginalnej grze?

Zadanie 74. Znajdź cenę anarchii dla gry Pigou ze zmienionym kosztem krawędzi z ax na x^α , gdzie $\alpha > 0$. Co się dzieje, gdy $\alpha \rightarrow \infty$?

Zadanie 75. Dany jest kwadrat $ABCD$. Jego wierzchołki stanowią wierzchołki grafu G , a jego krawędzie (skierowane w obie strony) stanowią krawędzie grafu. Ponadto każdy z wierzchołków chce przesłać wiadomości z pozdrowieniami w sieci stworzonej z grafu G do wierzchołka leżącego po drugiej stronie przekątnej. Wierzchołki A, B, C i D wysyłają odpowiednio 1, 2, 3 i 4 paczki z pozdrowieniami. Jaka jest samolubna równowaga Wardropa, a jaka jest socjalna (optymalna) równowaga Wardropa?

Zadanie 76. Podaj przykłady gier z $|A| > 2$, które nie mają dyktatora i albo są jednomyślne albo niezależne względem nieistotnych alternatyw. Podaj przykład gry z $|A| = 2$, która nie ma dyktatora, a jest jednomyślna i niezależna względem nieistotnych alternatyw.

Zadanie 77. Udowodnij wzór z wykładu:

$$c(f) := \sum_{e \in E} c_e(f_e) \cdot f_e = \sum_{p \in \Pi} c_p(f) \cdot f_p.$$

Zadanie 78. Emerson, Lake i Palmer grają w turnieju w kamień, papier, nożyce. Każdy pojedynek toczony jest do 3 wygranych. W pierwszej rundzie Emerson grał z Lake'iem i zagrał 3 razy kamień i po razie papier i nożyczki. W drugiej rundzie Palmer ma zmierzyć się z Emersonem. Rozrysuj drzewko dla gry w postaci ekstensywnej, zakładając, że Emerson losuje swoje ruchy z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do liczby wcześniejszych użyć danego symbolu (np. zacznie kamieniem z pr. $\frac{3}{5}$). Jaka jest optymalna strategia dla Palmera?

Zadanie 79. Hugo i Jan licytują raketę tenisową Igi przy pomocy aukcji pierwszej kwoty. Obaj zakładają, że ten drugi będzie licytował kwotę jednostajnie z przedziału od 0 do 10 000\$. Hugo uważa, że rakietę ma wartość 8 000\$, a Jan, że 9 000\$. Znajdź równowagę Bayesa — Nasha dla tej gry.