

Wykład Algorytmiczna Teoria Gier 2023/24

Dominik Bojko
KPI WIT Politechnika Wrocławska

30 stycznia 2024

Spis treści

1 Wykład 1	2
1.1 Elementarz topologii i analizy wypukłej	2
2 Wykład 2	5
2.1 Krótka historia teorii	5
2.2 Gry strategiczne	5
3 Wykład 3	9
3.1 Gry o sumie stałej	9
3.2 Gry minimaxowe, punkty siodłowe, punkty bezpieczeństwa	9
3.3 Strategie zrandomizowane	11
4 Wykład 4	13
5 Wykład 5	15
6 Wykład 6	18
6.1 Szukanie równowag Nasha w grach dwumacierzowych	18
7 Wykład 7	20
7.1 Gry w postaci ekstensywnej	20
8 Wykład 8	21
9 Wykład 9	22
9.1 Aukcje	22
10 Wykład 10	24
10.1 Algorytm alfa-beta	24
10.2 Gry koalicyjne	24
11 Wykład 11	27
12 Wykład 12	28
12.1 Twierdzenie Arrowa	28
12.2 Gry na sieciach	29
13 Wykład 13	31
13.1 Mechanizm losowy	31
13.2 Podejście bayesowskie	32

1 Wykład 1

1.1 Elementarz topologii i analizy wypukłej

Zakładam, że pojęcia przestrzeni metrycznej, metryki, kuli otwartej, normy (w szczególności euklidesowej) i zbioru ograniczonego są znane.

Definicja 1. **Przestrzenią topologiczną** nazywamy parę $(X, \mathcal{O})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$, która spełnia aksjomaty:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
2. $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$,
3. $\mathcal{T} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ nazywamy wtedy **topologią**, a jej elementy — **zbiorami otwartymi**. Dopełnienia (do X) zbiorów otwartych, nazywamy **zbiorami domkniętymi**.

Uwaga 1. Często mówi się, że topologia jest zamknięta na dowolne sumy (mnogościowe) i skończone przekroje.

Uwaga 2. Każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną (wystarczy zadać topologię przez najmniejszy zbiór, zawierający wszystkie kule otwarte w przestrzeni metrycznej).

Przykład 1. Niech $X = \mathbb{R}$ i $\mathcal{O}$ będzie najmniejszą topologią, która zawiera wszystkie odcinki postaci (a, b) , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wtedy mówimy, że $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ jest przestrzenią topologiczną na prostej, ze standardową topologią.

Przykład 2. Podobnie, gdy $X = \mathbb{R}^k$ oraz $\mathcal{O}$ jest najmniejszą topologią, która zawiera wszystkie kule otwarte w normie ℓ_2 (tj. postaci $\{y \in \mathbb{R}^k : \|x - y\|_2 < r\}$, gdzie $x \in \mathbb{R}^k$ i $r \in \mathbb{R}_+$ mogą być dowolnie wybierane), to mówimy o standardowej (naturalnej) topologii w k -wymiarowej przestrzeni euklidesowej (z normą ℓ_2).

Uwaga 3. W probabilistyce ekstensywnie wykorzystuje się rodziny zbiorów borelowskich, które można zdefiniować jako najmniejsze σ -ciało (σ -algebrę) wygenerowaną przez topologię (najczęściej standardową).

Uwaga 4. **Przestrzeń dyskretna** $(X, \mathcal{O})$ to taka, w której $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.

Definicja 2 (Ciągłość). W przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{O})$ mówimy, że funkcja f jest ciągła, jeśli dla dowolnego $U \in \mathcal{O}$, $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}$.

Uwaga 5. W przestrzeniach metrycznych powyższa definicja ciągłości jest równoważna z definicjami Heinego i Cauchy'ego (przy założeniu pewnej wersji Aksjomatu Wyboru).

Definicja 3 (Zupełność). Ciąg $(x_n)_n$ w przestrzeni metrycznej (X, d) , nazywamy **ciągą Cauchy'ego** (albo **podstawowym**), jeśli spełnia warunek:

$$((\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0)(\forall n, m > N_0) d(x_n, x_m) < \varepsilon) .$$

Mówimy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest **zupełna**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Uwaga 6. Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

Uwaga 7. Istnieją uogólnienia pojęcia zupełności na przestrzenie topologiczne.

Twierdzenie 1.1 (Banach; o kontrakcji; o punkcie stałym). Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną, X oraz $f : X \rightarrow X$ będzie **kontrakcją** (odzworowaniem zwężającym) ze stałą $\alpha < 1$, tj. $(\forall x, y \in X) d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$. Wtedy f ma dokładnie jeden punkt stały x^* , tj. taki, że $f(x^*) = x^*$. Co więcej, jeśli $x_0 \in X$ jest dowolnym elementem przestrzeni X , to ciąg zdefiniowany jako $x_{n+1} = f(x_n)$, zbiega do x^* .

Uwaga 8. Można oszacować tempo zbieżności takiego ciągu.

Definicja 4 (Zwartość). Podzbiór przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{O})$ nazywamy **zwartym**, jeśli z dowolnego pokrycia $\{U_t\}_{t \in T}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi, można wybrać podpokrycie $\{U_{t_i}\}_{i=1}^n$ skończone.

Uwaga 9. **Pokrycie** to taka rodzina zbiorów, której suma mnogościowa daje całą przestrzeń.

Fakt 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^k$, z naturalną topologią, zwartość podprzestrzeni jest równoważna z jej domkniętością i ograniczonością.

Fakt 2. W przestrzeniach metrycznych, zwartość zbioru K jest równoważna z tym, że dla każdego ciągu w K , istnieje podciąg zbieżny do pewnego punktu $x \in K$.

Fakt 3. W przestrzeni metrycznej, każdy zbiór zwarty jest zupełny.

Twierdzenie 1.2 (Weierstrass; o osiąganiu kresów). Niech K będzie zbiorem zwartym. Każda funkcja ciągła $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga swoje kresy (maksima i minima, o ile takie istnieją).

Definicja 5. W przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, niech $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{V}$ i $\lambda_i \in K$, dla $i \in [n]$, będą takie, że $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, gdzie $(\forall i \in [n]) \lambda_i \in [0, 1]$. Mówimy wtedy, że punkt postaci $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \mathbb{V}$ jest **kombinacją wypukłą** punktów $(x_i)_{i=1}^n$ z wagami $(\lambda_i)_{i=1}^n$.

Definicja 6. Mówimy, że podzbiór przestrzeni liniowej $X \subset \mathbb{V}$ jest **wypukły**, jeśli kombinacja wypukła dwóch dowolnych punktów z X jest elementem X . W przeciwnym razie mówimy, że zbiór jest **wklęsły**.

Definicja 7. Niech X będzie podzbiorem przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Mówimy, że **funkcja** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest **wypukła**, jeśli

$$(\forall x, y \in X)(\forall \lambda \in [0, 1]) ((\lambda x + (1 - \lambda)y) \in X) \Rightarrow ((\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) .$$

Uwaga 10. Jeśli powyższa nierówność zachodzi w drugą stronę, to taką **funkcję** nazywamy **wklęsłą**.

Uwaga 11. Jeśli funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, posiada f'' , to $(\forall x \in A) f''(x) \geq 0$ jest równoważne z jej wypukłością.

Definicja 8. Mówimy, że zbiór wektorów $(x_i)_{i=0}^k$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jest **afinicznie niezależny względem** x_0 , jeśli $(x_i - x_0)_{i=1}^k$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{V}$.

Definicja 9. **Sympleksem k -wymiarowym** nazywamy najmniejszy możliwy podzbiór przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ taki, że zawiera wszystkie możliwe kombinacje wypukłe pewnych elementów $(x_i)_{i=0}^k \subset \mathbb{V}$, afinicznie niezależnych wzgl. x_0 . Elementy te nazywamy **wierzchołkami** sympleksu.

Uwaga 12. Jeśli S jest sympleksem o wierzchołkach $X := (x_i)_{i=0}^k$, to każdy sympleks, którego wierzchołkami jest właściwy podzbiór X , nazywa się **ścianą** sympleksu S . W szczególności, wierzchołki są ścianami, ale cały sympleks już nie.

Uwaga 13. Zbiór sympleksów $(S_t)_{t \in T}$ nazywa się **podziałem symplecjajnym** sympleksu S , jeśli dla $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in T$, $S_{t_1} \cap S_{t_2}$ jest albo zbiorem pustym albo wspólną ścianą S_{t_1} i S_{t_2} .

Twierdzenie 1.3 (Brouwera; o punkcie stałym). Jeśli S jest sympleksem, a $f : S \rightarrow S$ jest odwzorowaniem ciągłym, to f ma punkt stały.

Uwaga 14. Twierdzenie to ma wiele dowodów. Jeden z najprostszych można znaleźć w książce: K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii, PWN, 1962

Opiera się na twierdzeniach Spernera (kombinatorycznym) oraz Knastera—Kuratowskiego—Mazurkiewicza (teoriomnogociowym).

Uwaga 15. Twierdzenie Brouwera pozostaje prawdziwe, jeśli zamienimy w nim sympleks na zbiór zwarty, wypukły.

Definicja 10. W przestrzeni metrycznej (X, d) , **średnicą** zbioru $A \subset X$, nazywamy $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Definicja 11. Mówimy, że $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność **wykresu domkniętego**, jeśli dla ciągu $(x_i)_{i=1}^\infty$, zbieżnego do x^* , dowolny ciąg $(y_i)_{i=1}^\infty$, zbieżny do y^* , spełnienie warunku: $(\forall i \in \mathbb{N}) y_i \in f(x_i)$, pociąga za sobą, że $y^* \in f(x^*)$.

Twierdzenie 1.4 (Kakutaniego; o punkcie stałym). Niech S będzie sympleksem k -wymiarowym, a $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ będzie miał własność wykresu domkniętego oraz spełnia warunek: $(\forall s \in S)$, $f(s)$ jest zwarty i wypukły. Istnieje wtedy $x^* \in S$, że $x^* \in f(x^*)$.

Dowód. Niech $S^{(n)} := \{S_t^{(n)}\}_{t \in T_n}$ będzie ciągiem (indeksowanym $n \in \mathbb{N}$) podziałów symplecjajnych S , że

$$\delta_n := \sup\{\text{diam}(S_t^{(n)}) : t \in T_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+ ,$$

Zdefiniujemy $f^{(n)} : S \rightarrow S$ następująco: dla każdego $x \in S$, który jest wierzchołkiem któregoś z sympleksów z $S_t^{(n)}$, kładziemy $f^{(n)}(x) = s$, gdzie s jest dowolnie wybrane ze zbioru $f(x)$. Każdy pozostały punkt x należy albo tylko do jednego

sympleksu $S_t^{(n)}$ albo leży na wspólnej ścianie pewnej liczby sympleksów z podziału $\mathcal{S}^{(n)}$. W pierwszym z tych przypadków, istnieje dokładnie jeden zestaw wag $(\lambda_i^{(n,t)})_{i=0}^k \in [0, 1]^{k+1}$, że wybrany $x \in S$ jest kombinacją wypukłą wektorów $(x_i^{(n,t)})_{i=0}^k$ z tymi wagami (gdzie $(x_i^{(n,t)})_{i=0}^k$ jest zbiorem wszystkich wierzchołków sympleksu $S_t^{(n)}$). Wtedy kładziemy $f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n,t)} f^{(n)}(x_i^{(n,t)})$. W drugim przypadku, można wybrać dowolny z sympleksów $S_t^{(n)}$, gdyż wagi wierzchołków niestowarzyszonych ze wspólną ścianą różnych sympleksów będą równe 0, więc analogiczna definicja jest w ten sposób jednoznaczna. Każde z odwzorowań $f^{(n)} : S \rightarrow S$ jest liniowe na każdym z $S_t^{(n)}$, więc z definicji podziału symplecjajnego, będzie to odwzorowanie ciągłe. Wobec tego, z tw. Brouwera, każde z odwzorowań $f^{(n)} : S \rightarrow S$ ma punkt stały, tj. istnieją dla każdego $n \in \mathbb{N}$, elementy $x^{*n} \in S$, że $f^{(n)}(x^{*n}) = x^{*n}$. Zauważmy, że wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $t_n \in T_n$, że punkty stałe możemy wyrazić jako kombinacje wypukłe wierzchołków $t_n : (x_i^{*n})_{i=0}^k$, tj. w postaci: $x^{*n} = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{*n} x_i^{*n}$. Rozważmy teraz ciągi: $(x_i^{*n})_n$, $(\lambda_i^{*n})_n$ i $(f^{(n)}(x_i^{*n}))_n$. Ze zwartości S i $[0, 1]$ otrzymujemy, że ciągi te mają podciągi zbieżne. Wobec tego możemy rozważać założyć, że te ciągi są zbieżne (precyzyjniej, należałoby zbudować podciągi podciągów podciągów i pracować tylko na ich indeksach tych pierwszych zamiast na $n \in \mathbb{N}$; oczywiście wtedy wystarczy je przeindeksować tak, żeby odpowiadały kolejnym liczbom naturalnym). Co więcej, zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, z założeń dla ciągu podziałów symplecjajnych, mamy $d(x_i^{*n}, x^{*n}) \leq \delta_n \rightarrow 0$. Wobec tego, dla wszystkich $i \in [0 : k]$, ciągi $(x_i^{*n})_n$ oraz $(x^{*n})_n$ zbiegają do tej samej granicy x^* , gdy $n \rightarrow \infty$. Niech ponadto dla $i \in [0 : k]$, $\lambda_i^{*n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_i^*$ oraz $f^{(n)}(x_i^{*n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_i^*$. Naturalnie, korzystając z własności punktu stałego, możemy przedstawić interesujące nas punkty stałe jako następujące kombinacje wypukłe: $x^{*n} = f^{(n)}(x^{*n}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{*n} f^{(n)}(x_i^{*n})$. Zauważmy, że punkty postaci x_i^{*n} są granicami pewnych ciągów $(x_i^{(n,t_{i,n})})_n$, gdzie $t_{i,n}$ są tak dobrane, że zawierają punkty graniczne x_i^{*n} . Spełniają one $f^{(n)}(x_i^{(n,t_{i,n})}) \in f(x_i^{(n,t_{i,n})})$. Z domkniętości wykresu dostajemy dla każdych $i \in [0 : k]$ i $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_i^{*n}) \in f(x_i^{*n})$. Co więcej, $x_i^{*n} \rightarrow x^*$ i $f^{(n)}(x_i^{*n}) \rightarrow \xi_i^*$, więc ponownie z domkniętości wykresu mamy dla wszystkich $i \in [0 : k]$, $\xi_i^* \in f(x^*)$. Z twierdzenia o arytmetyce granic, $x^* = \sum_{i=0}^k \lambda_i^* \xi_i^*$, ale $f(x^*)$ jest zbiorem wypukłym, więc jest zamknięty na kombinacje wypukłe. Wobec tego także $x^* \in f(x^*)$. $\square$

Uwaga 16. Powyższe tw. pozostaje prawdziwe, gdy zamienimy w sformułowaniu sympleks S na zbiór zwarty i wypukły.

Uwaga 17. Twierdzenia o punktach stałych będą używane w dalszych częściach wykładu.

2 Wykład 2

2.1 Krótka historia teorii

John von Neumann — stworzył teorię gier, m.in. twierdzenie min-max-owe. Razem z Oskarem Morgensternem napisali książkę pt. „Theory of Games and Economic Behavior”, która dała początek teorii gier, teorii wypłat i mikroekonomii. Koncept algorytmicznej teorii gier pojawił się mniej więcej w tamtym czasie. 7 lat po „The Theory of Games and Economic Behavior”, pojawiła się praca Johna Nasha, która rzuciła nowe światło na tę dziedzinę. Wprowadził do niej tzw. pojęcie równowagi Nasha. Liczne zastosowania tej pracy w inżynierii finansowej, w konsekwencji dały w 1994r. Nashowi nagrodę Nobla z ekonomii.

Postaramy się poruszyć główne wątki Teorii Gier, przede wszystkim pod kątem zastosowań algorytmicznych, ale też w innych dziedzinach.

2.2 Gry strategiczne

Do zdefiniowania gry w klasycznym ujęciu potrzeba kilku elementów: graczy, ich wiedzy (informacji), akcji podejmowanych przez tych graczy na podstawie swojej wiedzy oraz wypłat, które są wynikiem akcji podjętych przez graczy.

Najprostsza, klasyczna wersja gry przeznaczona jest dla skończonej liczby graczy, którzy podejmują jednocześnie po 1 akcji.

Definicja 12 (Gra w postaci normalnej). Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem n **graczy**. Każdy z graczy p_i , $i \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}$, ma swój zwarty zbiór **strategii (czystych)** S_i . W każdej realizacji gry, każdy z graczy p_i wybiera swoją strategię $s_i \in S_i$, tworząc w ten sposób wektor strategii $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Wtedy $S = \prod_{i=1}^n S_i$ to zbiór możliwych **profilu strategii** (wektorów strategii). Każdy profil strategii s jednoznacznie wyznacza wektor **wypłat** (ang. *payoff/utilities*) $u(s) = (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s))$ ($u : S \rightarrow V^n$, gdzie V jest p. lin.), czyli zysków (bądź strat w przypadku ujemnych wartości) poszczególnych graczy (p_i zyskuje $u_i(s)$). Każda z u_i jest nazywana **funkcją wypłat** dla gracza p_i . Trójkę uporządkowaną (P, S, u) nazywamy **grą w postaci normalnej (strategicznej)**. Jeśli $|A| < \aleph_0$, to mówimy, że gra jest **skończona**.

Uwaga 18. Zazwyczaj przyjmuje się, że $\text{img}(u_i) \subseteq \mathbb{R}$.

Uwaga 19. Czasem używa się terminów wektora i funkcji kosztu. W statystycznej teorii gier mówi się o wektorze oraz funkcji strat (ang. *loss function*).

Uwaga 20. Jeśli dla każdego gracza p_i , u_i zależy tylko od s_i , to mówimy, że strategie czyste są **niezależne** od profili strategii.

Uwaga 21. Grę na mniej niż 2 graczy będziemy nazywali **trywialną**.

Uwaga 22. Gracze mogą mieć wpływ na wypłaty innych graczy.

Uwaga 23. Dla każdego gracza p_i definiujemy preferencyjny porządek $\geq_i \in S^2$ (pełny, tj. $(\forall s)(\exists s' \neq s) s \geq_i s' \vee s' \geq_i s$, słabo-antysymetryczny, przechodni i zwrotny), który określa, zależności między możliwymi profilami strategii z punktu widzenia każdego z graczy. Jeśli $s \geq_i s'$, to mówimy, że p_i preferuje s nad s' .

Przykład 3 (Jaś i Małgosia). Jaś i Małgosia są w chatce z piernika i mają dowolną liczbę paczek cukierków, po 50 sztuk każda. Każdy cukierek, który zjedzą bez zwymiotowania działa na nich pozytywnie. W przeciwnym razie wymiotują zależnie długo od liczby zjedzonych cukierków. Strategie czyste dzieci to liczby zjedzonych paczek cukierków.

Strategie czyste Jasia i Małgosi są niezależne, więc łatwo wybrać „najlepsze” strategie czyste dla obojga z nich.

Uwaga 24. Powyższa aranżacja to tak zwana **reprezentacja (dwu-)macierzowa** gry dwuosobowej w postaci normalnej.

Przykład 4 (Duża gra kolektywna). Niech $|P| = 40\,000\,000$, $(\forall p_i \in P) S_i = \{\text{Revolt}, \text{Peace}\}$ oraz

$$u_i = \begin{cases} 1 & |\{p_j : s_j = \text{Revolt}\}| \geq 1\,000\,000 \wedge s_i = \text{Revolt} \\ -1 & |\{p_j : s_j = \text{Revolt}\}| < 1\,000\,000 \wedge s_i = \text{Revolt} \\ 0 & s_i = \text{Peace} \end{cases}$$

Definicja 13 (Dominacje, czysta równowaga Nasha i potimum Pareta).

Niech $P = [n]$. Dla danego profilu strategii $s \in S$, określamy s_{-i} jako profil strategii $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ z pominięciem strategii czystej i -tego gracza. Będziemy wtedy zapisywać skrótowo $s = \langle s_i, s_{-i} \rangle$.

Mówimy, że strategia czysta s_i^* :

$s_M \backslash s_J$	1	2	3
1	50	-101	-151
2	100	50	-151
3	-151	-151	50

Rysunek 1: Zysk Małgosi i Jasia $u_M \backslash u_J$, przedstawiony w postaci macierzowej.

- słabo dominuje s'_i , jeśli

$$(\forall s \in S) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) \geq u_i(\langle s'_i, s_{-i} \rangle).$$

- ściśle dominuje s'_i , jeśli

$$(\forall s \in S) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) > u_i(\langle s'_i, s_{-i} \rangle).$$

- jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i} (lub strategią najlepszą dla i), jeśli

$$(\forall s_i \in S_i) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) \geq u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle).$$

Mówimy, że profil strategii $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) \in S$:

- jest strategią (słabo) dominującą (lub rozwiązaniem (słabo) dominującym) jeśli:

$$(\forall i \in [n])(\forall s \in S) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) \geq u_i(s).$$

- jest strategią ściśle dominującą (lub rozwiązaniem (ściśle) dominującym) jeśli:

$$(\forall i \in [n])(\forall s \in S, s_i \neq s_i^*) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) > u_i(s).$$

- jest równowagą Nasha w strategiach czystych, jeśli $(\forall i \in [n]) (s_i^* \text{ jest najlepszą odpowiedzią na } s_{-i}^*)$.

- jest optimum w sensie Pareta, jeśli

$$(\forall s \in S \setminus \{s^*\}) \{[(\exists j \in [n]) u_j(s) < u_j(s^*)] \vee [u(s) = u(s^*)]\}.$$

Zbiór wszystkich optimum w sensie Pareta jest nazywanych często **frontem Pareta**.

Uwaga 25. Jeśli strategia czysta s_i^* dominuje s'_i , to zmiana strategii czystej z s_i^* na s'_i , nie poprawi wypłaty gracza i (w przypadku ścisłej dominacji, nawet pogorszy).

Uwaga 26. Czysta równowaga Nasha oznacza, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmieniać strategii, bo na tym nie zyska.

Uwaga 27. Optimum Pareta oznacza, że jakkolwiek zmiana profilu strategii nie jest w stanie zwiększyć wypłaty żadnego z graczy bez obniżenia co najmniej jednej z wypłat innych graczy.

Przykład 5 (Wojna płci). Para umówiła się na sobotnie wydarzenie na lodowisku, ale oboje nie byli początkowo świadomi o tym, że o tej samej godzinie są dwa różne wydarzenia w dwóch różnych miejscach. Nie chcą jednak się dopytywać, żeby nie wyszło na jaw, że mogli myśleć o różnych wydarzeniach. Dlatego każde z nich wybiera jedno „w ciemno”. Oczywiście kobieta woli oglądać Mecz hokeja, a mężczyzna — Rewię na lodzie. Ale oboje wolą spędzić dzień razem. Poniższa przedstawiono macierz wypłat:

$s_M \backslash s_K$	M	R
M	5	-2
R	-2	2

Najlepszą odpowiedzią na $s_M = R$ jest $s_K = R$ (i vice versa), a najlepszą odpowiedzią na $s_K = M$ jest strategia czysta $s_M = M$ (i vice versa). W tej grze nie ma strategii czystych dominujących ani profili strategii dominujących. (R, R) i (M, M) są dwoma profilami strategii, które są jednocześnie równowagami Nasha, jak i tworzą front Pareta.

Przykład 6. Zmieniamy nieco wypłaty.

$s_M \backslash s_K$	M	R
M	5	1
R	-2	5

Kobiecie teraz nie robi różnicy, czy ogląda Rewię z mężem, czy bez (założmy, że $u_K(s_K = R, s_{-K}) \equiv c, c \in \mathbb{R}$). A mężczyzna trochę mniej lubi oglądać Mecz w hokeja na lodzie, niż w poprzednim przykładzie. Strategia czysta $s_K = M$ ściśle dominuje $s_K = R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c < 1$, a słabo dominuje, gdy $c \leq 1$. Strategia czysta $s_M = R$ ściśle dominuje $s_M = M$.

Gdyby natomiast $c > 5$, profil strategii (R, R) jest rozwiązaniem ściśle dominującym. Natomiast wtedy (M, M) nie jest już równowagą Nasha.

Przykład 7. 1. *Bulbasaur* — trawa, 4. *Charmander* — ogień, 7. *Squirtle* — woda,

$s_2 \backslash s_1$	B	C	S
B	-1	1	-1
C	-1	-1	1
S	1	-1	-1

Rysunek 2: Macierz wygranych trenerów Pokémon

W tej grze nie ma czystych równowag Nasha, ale istnieje 6 optimów Pareta!

Fakt 4 (Zadanie). Dla każdego gracza, (słaba) dominacja w sensie strategii czystych jest relacją częściowego porządku.

Fakt 5. $s \in S$ jest rozwiązaniem (słabym) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego gracza p_i , s_i dominuje (słabo) wszystkie inne strategie tego gracza.

Fakt 6. Jeśli $s \in S$ jest rozwiązaniem słabym, to dla każdego gracza $i \in [n]$, s_i jest najlepszą odpowiedzią na każdy możliwy profil strategii innych graczy s'_{-i} . W szczególności jest równowagą Nasha dla strategii czystych.

Uwaga 28. Jeśli rozważny gracz i posiada strategie $s_i, s'_i \in S_i$ takie, że s'_i ściśle dominuje s_i , to powinien rozważać jedynie zbiór $S_i \setminus \{s_i\}$.

Fakt 7 (Algorytm eliminacji strategii czystych zdominowanych.). Jeśli istnieją strategie czyste ściśle zdominowane, usuwaj je, dopóki się da. W wyniku takiego algorytmu otrzymamy uproszczoną grę. Nawet gdy dojdziemy do gry z jedną strategią, to nie musi to być to strategia dominująca (nawet w słabym sensie).

Przykład 8 (Mecz piłki nożnej vs Romantyczny film).

$s_M \backslash s_K$	M	R
M	5	1
R	1	5

Można usunąć $s_K = R$, a potem $s_M = M$, otrzymując strategię (M, R) albo $s_M = M$, a potem $s_K = R$, otrzymując tę samą strategię (M, R) .

Przykład 9.

$s_2 \backslash s_1$	A	B	C
X	5	3	2
Y	5	3	0

W tej grze nie ma strategii czystych ściśle dominujących. Można usunąć najpierw $s_2 = C$, równoważną z $s_2 = B$, otrzymując grę, w której można albo usunąć równoważne $s_1 = X$ albo $s_1 = Y$, co prowadzi odpowiednio do (Y, A) albo (X, B) . Jeśli najpierw usuniemy $s_1 = Y$, to potem można usunąć $s_2 = A$, doprowadzając do dwóch opcji: (X, B) i (X, C) . Wobec tego usuwanie słabo dominujących rozwiązań może prowadzić do różnych uproszczonych gier.

Twierdzenie 2.1. Jeśli istnieje rozwiązanie ściśle dominujące, to jest ono jedno i algorytm eliminacji prowadzi do tego rozwiązania.

Przykład 10 (Paradoks więźnia (The prisoner's dilemma)). Więźniowie mogą albo Milczeć albo „Sypać”. Niech $c > a > d > b$. W tej grze jedyne optimum Pareta (M, M) jest różne od jedynej równowagi Nasha (S, S) !

		s_2		M	S
		s_1		M	S
	M	a	a	b	c
	S	c	b	d	d

Rysunek 3: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

Przykład 11 (Iterowany dylemat więźnia). Gracze grają wiele razy w Dylemat Więźnia. Jeśli liczba gier jest ustalona, to za każdym razem obu opłaca się „sypać”. Jeśli liczba gier nie jest znana, to za każdym razem obu opłaca się milczeć.

Definicja 14. Gra koordynacyjna to gra, w której każdy gracz ma identyczny zbiór strategii czystych oraz wypłata gracza $p \in P$ jest niemalejącą funkcją ze względu na rosnącą liczbę graczy, która wybierze tę samą strategię czystą. W grze antykoordynacyjnej (tłumnej) mamy do czynienia z nierosnącą funkcją. W grze dyskoordynacyjnej dla dwóch osób, jeden z graczy dąży do koordynacji, a drugi do antykoordynacji strategii czystych.

Uwaga 29. Nie mylić z gry koordynacyjnej z grą kooperacyjną!

Uwaga 30. Dylemat Więźnia jest grą koordynacyjną.

Przykład 12. (Matching pennies 1) Gracze wygrywają, jeśli wybiorą tę samą stronę monety. Jest to gra koordynacyjna.

		s_2		O	R
		s_1		O	R
	O	1	1	-1	-1
	R	-1	-1	1	1

Rysunek 4: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

Przykład 13. (Matching pennies 2) Gracz 1. wygrywa, jeśli oboje mają tę samą stronę monety, a drugi — w przeciwnym przypadku. Jest to gra dyskoordynacyjna.

		s_2		O	R
		s_1		O	R
	O	1	-1	-1	1
	R	-1	1	1	-1

Rysunek 5: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

Przykład 14. (Matching pennies 3) Gracze wygrywają, jeśli mają różne strony monet i przegrywają w przeciwnym przypadku. Jest to gra antykoordynacyjna.

	s_2	O	R
s_1			
O	-1	1	
R	1	-1	

Rysunek 6: Funkcje wypłat $u_1 \setminus u_2$.

3 Wykład 3

3.1 Gry o sumie stałej

Definicja 15 (Gra o sumie zerowej, gra o sumie stałej). Jeśli gra G spełnia warunek:

$$(\forall s \in S) \sum_{i \in [n]} u_i(s) = 0 \quad \left(\sum u \equiv 0 \right),$$

to taką grę nazywamy **grą o sumie zerowej**. Jeśli K jest ciałem skalarów nad V , to gra G , która spełnia warunek:

$$(\exists c \in K)(\forall s \in S) \sum_{i \in [n]} u_i(s) = c,$$

nazywamy **grą o sumie stałej**.

Fakt 8 (Zadanie). Każda gra o sumie zerowej jest grą o sumie stałej.

Twierdzenie 3.1 (von Neumann, Morgenstern, 1944; zadanie). Każda gra o sumie niezerowej na n graczy jest równoważna z grą o sumie zerowej dla $n + 1$ graczy.

Fakt 9. W grze o sumie stałej, każda strategia jest Pareto-optymalna.

3.2 Gry minimaxowe, punkty siodłowe, punkty bezpieczeństwa

Definicja 16. Rozważmy grę dwuosobową o sumie stałej c , w której S_1, S_2 są zwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^k$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$). **Wartością dolną** gry $\underline{v}$ nazywamy $\sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$. **Wartością górną** gry $\bar{v}$ nazywamy $\inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2)$.

Jeśli $\underline{v} = \bar{v}$, to mówimy, że gra ma **wartość** v . Profil strategii, który realizuje wartość gry, nazywamy **punktem siodłowym**. Profil strategii (s_1, s_2) taki, że s_1 realizuje wartość dolną, a s_2 -wartość górną gry, nazywamy **strategią minimaxową (maksiminową)**.

Uwaga 31. W grach wieloosobowych o sumie stałej c można zdefiniować wartość dolną dla gracza i jako

$$\underline{v}_i := \sup_{s_i \in S_i} \inf_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle). \text{ Można zdefiniować punkt siodłowy w takiej grze, jeśli } \sum_{i=1}^n \underline{v}_i = c.$$

Przykład 15 (Demokracy vs Republikanie). Politycy dwóch partii debatują na temat bardzo ważnej kwestii.

P - Poparcie danej sprawy, O - Opozycyjne nastawienie wobec sprawy, N - Neutralne nastawienie.

	s_R	P	O	N	min
s_D					
P		40	80	20	20
		60	20	80	
O		20	75	25	25
		80	25	75	
N		65	70	60	30
		35	30	40	
max		80	30	40	30

Rysunek 7: Poparcie dla partii w USA w % w zależności od wybranego zdania w bardzo ważnej kwestii.

Zarówno wartość dolna, jak i górna wynoszą 30.

Profil strategii (N, O) jest strategią minimaxową, czyli punktem siodłowym. Jest też również jedyną równowagą Nasha.

Przykład 16 (Settlers). Kartagińczycy planują napad 2 oddziałami na Rzymian, którzy muszą rozlokować 3 swoje oddziały do 2 ufortyfikowań: na północy półwyspu Apenińskiego oraz na Sycylii. Strategie opisujemy przez wektory liczby oddziałów odpowiednio w Italii i na Sycylii. Prawdopodobieństwo sukcesu ataku na daną część Cesarstwa Rzymskiego jest proporcjonalna do liczby oddziałów atakujących do wszystkich obecnych oddziałów, jeśli broniący nie mają przewagi liczebnej albo 0, jeśli mają. Wypłata to oczekiwana liczba przejętych/obronionych ufortyfikowań.

$s_K \backslash s_R$	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)	min
(2,0)	2 0	1.5 0.5	$\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$	1 1	0
(1,1)	1 1	1.5 0.5	1.5 0.5	1 1	0.5
(0,2)	1 1	$\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$	1.5 0.5	2 0	0
max	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$ 0.5

Rysunek 8: Oczekiwana liczba posiadanych fortów po ataku.

Wartość dolna gry to 0.5, a górna to $\frac{2}{3}$. Strategie minimaksowe to $((1, 1), (1, 2))$ i $((1, 1), (2, 1))$. Gra ta nie ma czystych równowag Nasha.

Twierdzenie 3.2 (von Neumann, 1928). Dla gry dwuosobowej o sumie stałej:

1. $\underline{v} \leq \bar{v}$,
2. Jeśli gra ma równowagę Nasha, to $\underline{v} = \bar{v}$ i każdy punkt siodłowy jest równowagą Nasha.

Dowód. Zauważmy, że

$$\sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = \inf_{y \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} \left(\inf_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \right) \leq \inf_{y \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, y),$$

co dowodzi 1.

Niech (s_1^*, s_2^*) będzie równowagą Nasha. Z definicji, dla dowolnych $s_1 \in S_1$ i $s_2 \in S_2$,

$$u_1(s_1^*, s_2) \geq u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*).$$

Wobec tego

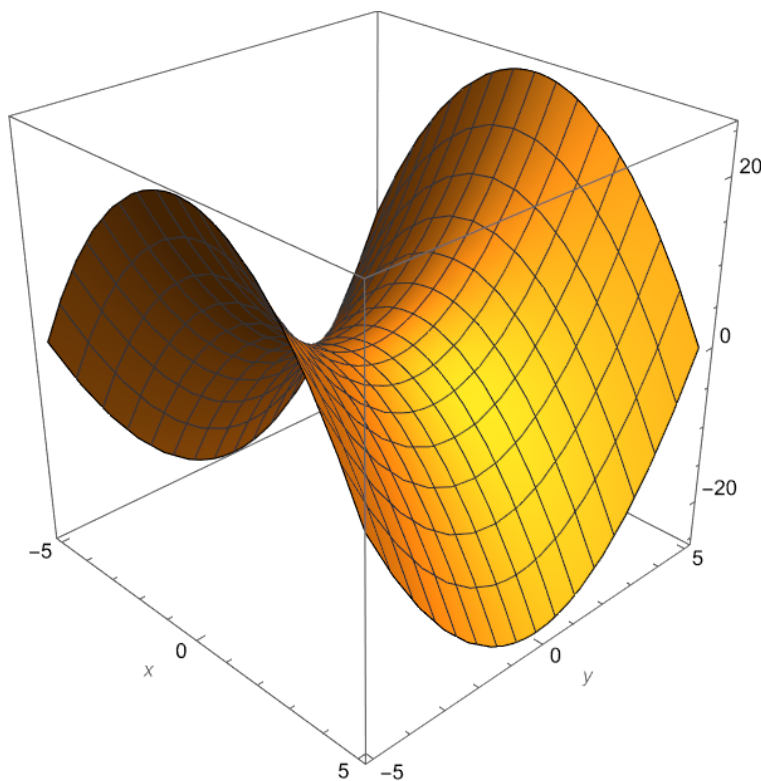
$$\underline{v} = \sup_{x \in S_1} \inf_{y \in S_2} u_1(x, y) \geq \inf_{y \in S_2} u_1(s_1^*, y) \geq u_1(s_1^*, s_2^*) \geq \sup_{x \in S_1} u_1(x, s_2^*) \geq \inf_{y \in S_2} \sup_{x \in S_1} u_1(x, y) = \bar{v}.$$

Zatem nierówności są równościami, czyli strategie minimaksowe są równowagami Nasha. □

Definicja 17. Profile strategii, które mają wartość z przedziału $[\underline{v}, \bar{v}]$, nazywają się **strategiami bezpieczeństwa**.

Uwaga 32. Zaprezentowaną technikę pochodzącą od J. von Neumanna, można łączyć z algorytmem usuwania strategii zdominowanych.

Przykład 17. Rozważmy grę dwuosobową o sumie zerowej z $u_1(x, y) = -x^2 + y^2 = -u_2(x, y)$, gdzie $S_1 = S_2 = [-5, 5]$.



$\inf_{y \in S_2} u_1(x, y) = -x^2$, $\sup_{x \in S_1} u_1(x, y) = y^2$. $\sup_{x \in S_1} \inf_{y \in S_2} u_1(x, y) = 0 = \inf_{y \in S_2} \sup_{x \in S_1} u_1(x, y)$. Te wartości realizowane są dla punktu $(0, 0)$, czyli jest on punktem siodłowym, co zbiega się z terminologią z analizy wielowymiarowej.

3.3 Strategie zrandomizowane

Definicja 18. Niech $(P = [n], S, u)$ będzie grą skończoną w postaci normalnej. **Strategią mieszaną gracza i** nazywamy rozkład prawdopodobieństwa (probability mass function) $\pi_i : S_i \rightarrow [0, 1]$. **Strategią mieszaną gry** nazywamy rozkład produktowy $\pi := \times_{i=1}^n \pi_i : S \rightarrow [0, 1]$. Wypłatą gracza j jest wtedy wartość oczekiwana:

$$u_j(\pi) := \mathbb{E}_\pi(u_j) = \sum_{s_j \in S_j} \sum_{s_{-j} \in S_{-j}} u_j(\langle s_j, s_{-j} \rangle) \pi(\langle s_j, s_{-j} \rangle).$$

Zbiór wszystkich rozkładów gracza i będziemy oznaczać przez Δ_i , a ich produkt przez Δ .

Uwaga 33. Jeśli nie wskazano inaczej, zakładamy, że $(\pi_i)_{i=1}^n$ są niezależne.

Przykład 18 (Koncert — battle of sexes). Para umówiła się, że spotkają się na koncercie rockowym, ale jednocześnie w mieście grają dwa zespoły. Muszą wybrać na który zespół idą. Mogą zastosować dwie strategie mieszane $\pi_K = (p, 1-p)$ oraz $\pi_M = (q, 1-q)$.

		s_M	
		q Yes	$(1-q)$ U2
s_K	p Yes	5, 2	1, 1
	$(1-p)$ U2	-2, -2	2, 5

Wówczas $u_1(\pi) = 5pq + p(1-q) - 2q(1-p) + 2(1-p)(1-q) = 2 - p - 4q + 8pq$ oraz $u_2(\pi) = 2pq + p(1-q) - 2q(1-p) + 5(1-p)(1-q) = 5 - 3p - 7q + 8pq$.

Potrzebne jest nieco ogólniejsze pojęcie równowagi:

Definicja 19 (Mieszana równowaga Nasha). **(Mieszana) równowaga Nasha (MNE)** nazywamy rozkład łączny π^* taki, że

$$(\forall i \in [n]) (\forall \pi_i \in \Delta_i) u_i(\pi^*) \geq u_i(\langle \pi_i, \pi_{-i}^* \rangle).$$

Uwaga 34. Ta definicja jest zgodna z czystymi równowagami Nasha (PNE). Wystarczy zamienić zbiór dostępnych strategii S na Δ . W szczególności, oznacza to, że mieszana strategia gracza i będąca równowagą Nasha jest najlepszą odpowiedzią.

Uwaga 35. Analogicznie można zmieniać inne definicje, zamieniając S na Δ .

Przykład 19 (Koncerty; c.d.). Szukamy mieszaných równowag Nasha. Zauważmy, że $u_1(\pi) = 2 - 4q + p(8q - 1)$ oraz $u_2(\pi) = 5 - 3p + q(8p - 7)$. Wobec tego, mamy po 3 opcje najlepszych odpowiedzi:

$$p = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } q < \frac{1}{8}, \\ 1 & \text{jeśli } q > \frac{1}{8}, \\ ? & \text{jeśli } q = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } p < \frac{7}{8}, \\ 1 & \text{jeśli } p > \frac{7}{8}, \\ ? & \text{jeśli } p = \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Jeśli $p = 0$, to $q = 0$, i vice versa. Jeśli $p = 1$, to $q = 1$, i vice versa. Jeśli wobec tego $p \notin \{0, 1\}$, to $q = \frac{1}{8}$, czyli $p = \frac{7}{8}$. Otrzymujemy dwie czyste równowagi Nasha (PNE): $((0, 1), (0, 1))$ oraz $((1, 0), (1, 0))$, a także 3 mieszane równowagi Nasha (MNE), czyli dwie poprzednie i dodatkowo: $\pi = ((\frac{7}{8}, \frac{1}{8}), (\frac{1}{8}, \frac{7}{8}))$. W pierwszych dwóch wypadkach wypłaty mamy uwzględnione w tabeli. W ostatnim, $u_1(\pi) = 1, 5 = u_2(\pi)$.

Twierdzenie 3.3. Każda czysta równowaga Nasha $s^* \in S$ jest mieszaną równowagą Nasha.

Dowód. Niech $\pi_i \in \Delta_i$. Wtedy

$$u_i(\langle \pi_i, s_{-i}^* \rangle) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(\langle s_i, s_{-i}^* \rangle) \pi_i(s_i) \leq \sum_{s_i \in S_i} u_i(\langle s_i^*, s_{-i}^* \rangle) \pi_i(s_i) = u_i(s^*),$$

co kończy dowód. □

Definicja 20. Nośnikiem rozkładu łącznego strategii mieszanej π nazywamy zbiór $S(\pi) = \{s \in S : \pi(s) > 0\}$. Nośnikiem rozkładu strategii mieszanej gracza π_i nazywamy zbiór $S(\pi_i) = \{s_i \in S_i : \pi_i(s_i) > 0\}$.

Uwaga 36. W koncertowym przykładzie mieliśmy 3 różne nośniki dla równowag Nasha: $\{(Yes, Yes)\}$, $\{(U2, U2)\}$ dla równowag czystych oraz $\{(Yes, Yes), (Yes, U2), (U2, Yes), (U2, U2)\}$ dla ostatniej.

Twierdzenie 3.4 (Równość wypłat). Niech $\pi^* \in \Delta$ będzie MNE. Wtedy $(\forall s_i \in S(\pi_i^*)) u_i(\langle s_i, \pi_{-i}^* \rangle) = u_i(\pi)$.

Dowód. Jeśli $|S(\pi_i^*)| = 1$, to twierdzenie jest trywialne. Niech zatem będzie większe i niech $s'_i \in S(\pi_i^*)$ będzie strategią czystą, że $u_i(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) > u_i(\pi)$ oraz taką, że maksymalizuje tę wypłatę w $S(\pi_i^*)$. Wtedy

$$u_1(\pi) = \sum_{s_i \in S(\pi_i^*)} u_1(\langle s_i, \pi_{-i}^* \rangle) \pi_i(s_i) < u_1(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) \pi_i(s'_i) + \sum_{s_i \in S(\pi_i^*) \setminus \{s'_i\}} u_1(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) \pi_i(s_i) = u_1(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle).$$

Zatem π musiałoby nie być MNE — sprzeczność. Uwaga: przypadek $u_i(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) < u_i(\pi)$ występuje tylko wtedy gdy pojawi się też s'_i , które spełnia tę nierówność w drugą stronę. □

Uwaga 37. Skoro zmiana decyzji gracza ze stanu MNE, nie zmienia jego wypłaty, to dlaczego ma ją grać? Gdyby dwoje graczy zmieniło swoją decyzję, wypłata mogłaby ulec pogorszeniu.

4 Wykład 4

Przykład 20 (Równość wypłat vs Metoda Williamsa 1). Rozważmy dwuosobową grę o sumie zerowej. Wtedy wystarczy, że rozważamy wypłaty 1. gracza.

$s_K \backslash s_R$	A	B	C	D	min
X	1	4	3	5	1
Y	4	1	4	2	1
max	4	4	4	5	1 \diagup 4

Można zauważyć, że strategie C i D są zdominowane. Wobec tego sprawdzamy warunek $u_2(\langle \pi_1, A \rangle) = u_2(\langle \pi_1, B \rangle) = -p - 4(1-p) = -4p - (1-p)$, czyli $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. Analogicznie $u_1(\langle X, \pi_2 \rangle) = u_1(\langle Y, \pi_2 \rangle)$. MNE jest $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0))$. $u_1(\pi) = 4 - 1, 5 = 2, 5$.

Metoda Williamsa: rozwiązanie graficzne.

1. Przedstaw strategię 2. gracza jako punkty w przestrzeni $X \times Y$ odpowiedzi gracza 1.
2. Znajdź otoczkę wypukłą tych punktów.
3. Poprowadź prostą $X = Y$. Znajdź punkt z otoczki wypukłej, przeciętej z tą prostą, który minimalizuje wypłatę pierwszego gracza.

Przykład 21 (Metoda Williamsa 2). Kolejna gra o sumie zerowej

$s_K \backslash s_R$	A	B	C	D	E	min
X	0	0	3	1	2	0
Y	0	3	0	1	2	0
Z	3	0	0	2	1	0
max	3	3	3	2	2	0 \diagup 2

Z Metody Williamsa wychodzi, że $\frac{1}{3}(A + B + C)$ jest rozwiązaniem dla drugiego gracza. Analogicznie wychodzi $\frac{1}{3}(X + Y + Z)$ dla pierwszego.

Uwaga 38. Tym razem punkty rysujemy w przestrzeni $X \times Y \times Z$, a otoczkę kroimy z prostą $X = Y = Z$.

Przykład 22 (Natarczywy Adorator). Ponownie rozważamy grę o sumie zerowej.

$s_K \backslash s_A$	S	G	
S	-1	1	p
YG	1	-1	1-p
	q	1-q	

Otrzymujemy MNE $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Można narysować graf najlepszych odpowiedzi. Można przedstawić to jako lewostronny cykl w powyższej tabeli. Oznacza to, że gra nie ma PNE.

Twierdzenie 4.1 (Nash). Rozważmy $\Gamma = (P = [n], S, u)$ będzie grą w postaci normalnej. Niech każdy ze zbiorów strategii graczy S_i będzie zwartym i wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^k$. Dla każdego $i \in [n]$, niech u_i będzie ciągłą oraz $(\forall; s_{-i} \in S_{-i}) s_i \mapsto u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle)$ — wklęsła. Wtedy Γ posiada co najmniej jedną mieszaną równowagę Nasha.

Dowód. Dla każdego $i \in [n]$ oraz $s_{-i} \in S_{-i}$, określamy $M_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle) = \sup_{x \in S_i} u_i(\langle x, s_{-i} \rangle)\}$ — zbiór najlepszych odpowiedzi gracza i na strategię s_{-i} . Rozważmy teraz funkcję $F : S \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(S_i)$, zadaną następująco:

$F(s) = \times_{i=1}^n M_i(s_{-i})$. Co oznaczaby, że F ma punkt stały? — wtedy $s^* \in F(s^*)$, czyli s_i^* jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i}^* , czyli jeśli F ma punkt stały, to jest równowagą Nasha.

1. Produkt zbiorów zwartych i wypukłych w topologii produktowej jest zwarty (tw. Tichonowa) i wypukły, więc S też jest taki.
2. Funkcje u_i są ciągłe i określone na zbiorze zwartym, więc z tw. Weierstrassa, osiągają swoje kresy, wobec czego M_i jest zawsze niepusty.
3. $u_i(\langle \cdot, s_{-i} \rangle)$ jest wklęsła, więc, jeśli $x_i, x'_i \in M_i(s_{-i})$, to

$$(\forall \alpha \in [0, 1]) \alpha u_i(\langle x_i, s_{-i} \rangle) + (1 - \alpha) u_i(\langle x'_i, s_{-i} \rangle) \leq u_i(\langle \alpha x_i + (1 - \alpha)x'_i, s_{-i} \rangle),$$

ale z definicji M_i ta nierówność może być spełniona jedynie kiedy jest tam równość. Oznacza to, że $M_i(s_{-i})$ jest zbiorem wypukłym. Wobec tego, $(\forall s \in S) F(s)$ jest zbiorem wypukłym.

4. M_i osiąga dla zadanego parametru tylko 1 supremum. Jego singleton jest zbiorem domkniętym. Skoro u_i jest ciągła, to przeciwobraz tego singletonu przez tę funkcję to zbiór domknięty, w zbiorze zwartym X_i , czyli jest to podzbiór domknięty i ograniczony, a zatem $M_i(s_{-i})$ jest zawsze zwarty, a stąd $F(s)$, jako produkt, również.
5. Pokażemy teraz domkniętość wykresu M_i . Niech $(x_j, y_{-j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (x^*, y^*)$ oraz, że $x_j \in M_i(y_{-j})$, czyli $(\forall s_i \in S_i) u_i(\langle s_i, y_{-j} \rangle) \leq u_i(x_j, y_{-j})$. u_i jest ciągła, więc $(\forall s_i \in S_i) u_i(\langle s_i, y^* \rangle) \leq u_i(x^*, y^*)$, czyli $x^* \in M_i(y^*)$.

Spełnione są zatem założenia tw. Kakutaniego, czyli Γ ma równowagę Nasha. □

Uwaga 39. Zauważmy, że od zbiorów strategii graczy wymagaliśmy tylko zwartości i wypukłości.

W szczególności, na ćwiczeniach pokazaliśmy, że Δ_i w strategiach mieszanych są sympleksami (czyli zbiorami zwartymi, wypukłymi). Wobec tego każda gra skończona posiada MNE.

Uwaga 40. Dowód pokazuje jak (w naturalny sposób) szukać równowag Nasha. Czyste równowagi Nasha dla skończonych rodzin strategii będą istniały, gdy ciąg adaptowanych strategii ustalanych przy pomocy najlepszych odpowiedzi, będzie zbieżny.

Uwaga 41. Schemat rozumowania w tym dowodzie pojawia się w wielu rozumowaniach w teorii gier.

Przykład 23 (Graf najlepszych odpowiedzi vs iteracja algorytmu z dowodu).

Aby stworzyć graf najlepszych odpowiedzi, rysujemy dla każdego gracza strzałki porównujące strategie czyste, przy założeniu odpowiedzi wszystkich innych graczy, od gorszej wypłaty, do lepszej. Przykładowo, gdy gracz 2. zagra A., graczowi pierwszemu opłaca się zagrać Y nad X i Z, czyli rysujemy strzałki od (X,A) i (Z,A) w kierunku (Y,A). Robimy tak dla wszystkich możliwych odpowiedzi i każdego gracza z osobna.

$s_1 \backslash s_2$	A	B	C
X	-1 / -1	0 / 2	-1 / 5
Y	2 / 0	3 / 3	4 / 2
Z	5 / -1	2 / 4	6 / 6

Z kolei, w dowodzie zakładaliśmy, że wszyscy gracze odpowiadają najlepiej na aktualny stan. Tzn. każdy z graczy porusza się o jeden krok zgodnie ze strzałką z grafu najlepszych odpowiedzi, tworząc w ten sposób 1 krok algorytmu. W powyższym przykładzie, algorytm zawsze zatrzyma się na (Z, Z), otrzymując w ten sposób równowagę Nasha.

Uwaga 42. W ogólności, algorytm może się w niektórych przypadkach zapętlić.

5 Wykład 5

Definicja 21. Przekształceniem afinicznym wypłat nazywamy $u' = \varphi(u)$, zadane wzorem

$$(\forall i \in [n])(\forall s \in S) u'_i(s) = \alpha_i u_i(s) + \beta_i(s_{-i}),$$

gdzie $\alpha_i > 0$, $\beta_i : S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$.

Przykład 24. Rozważmy poniższą grę.

		s_R	
		A	B
s_K	X	3 / 3	0 / 0
	Y	3 / -1	0 / 2

Ma ona dwie czyste równowagi Nasha: (X,A) i (Y,B) . Są to też równowagi Pareta.

Ponadto $\pi := ((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ jest MNE, z wypłatami $u = (1, \frac{4}{3})$.

Chcemy zmienić wypłaty, by pary profili (Y,A) i (X,B) oraz (X,A) i (Y,B) były symetryczne. W dodatku, zakładamy, że $u'_2(X, A) = 1$ i $u'_2(X, B) = 0$.

Otrzymamy drugą postać:

		s_R	
		A	B
s_K	X	1 / 2	0 / 0
	Y	0 / 0	2 / 1

Zauważmy, że (X,A) i (Y,B) wciąż są równowagami Nasha oraz optimami Pareta. Ponadto π jest wciąż MNE, ale z wypłatami $u' = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Wykres najlepszych odpowiedzi.

Twierdzenie 5.1. Jeśli φ jest przekształceniem afinicznym, to gry z wypłatami u i $u' = \varphi(u)$ mają te same równowagi Nasha (lecz ze zmienionymi wypłatami).

Dowód. Niech π'^* będzie MNE dla gry z wypłatami u' . Rozważmy dowolnego gracza $i \in [n]$. Niech $\pi' = (\langle \pi'_i, \pi'_{-i} \rangle)$ będzie strategią mieszaną gracza i . Wtedy:

$$\sum_{s \in S} \pi'^*(s) u'_i(s) \geq \sum_{s \in S} \pi'(s) u_i(s)$$

czyli

$$\alpha_i \sum_{s \in S} \pi'^*(s) u_i(s) + \sum_{s \in S} \pi'^*(s) \beta_i(s_{-i}) \geq \alpha_i \sum_{s \in S} \pi'(s) u_i(s) + \sum_{s \in S} \pi'(s) \beta_i(s_{-i}).$$

Zauważmy, że $\pi'^*(s) = \prod_{i=1}^n \pi'^*_i(s_i)$ oraz $\pi'(s) = \prod_{i=1}^n \pi'_i(s_i)$, czyli $\sum_{s \in S} \pi'^*(s) - \pi'(s) = 0$. Zatem

$$\sum_{s \in S} \pi'^*(s) u_i(s) \geq \sum_{s \in S} \pi'(s) u_i(s).$$

Wobec tego π'^* jest MNE w grze z wypłatami u . □

Definicja 22. Grę nazywamy **generyczną**, jeśli istnieje $(\exists \varepsilon > 0)(\forall s \in S)(\forall i \in [n])$ zmiana $u_i(s)$ o ε , nie zmienia równowag Nasha.

Uwaga 43. W praktyce oznacza to, że gra generyczna to taka, że żaden gracz nie ma takich samych wypłat (dla żadnej odpowiedzi innych graczy) dla strategii czystych, które są w nośniku strategii mieszanej tego gracza.

Uwaga 44. Gry generyczne mają nieparzystą liczbę MNE. (jak w przykładzie wyżej)

Definicja 23. Grą jednoosobową nazywamy grę, w której P składa się z gracza p oraz „natury”. Jest to dwuosobowa gra w postaci normalnej o sumie zerowej, gdzie strategie natury wybierane są losowo.

Przykład 25 (Bob vs Adwersarz). Adwersarz wysyła do wyroczni dwa komunikaty m_1 i m_2 . Wyrocznia losuje który z nich zaszyfrować i sugeruje strategię skorelowaną Bobowi. Adwersarz ma za zadanie zgadnąć, która wiadomość została zaszyfrowana, więc powinien odpowiedzieć z pr. $\frac{1}{2}$ na każdą z wiadomości.

Definicja 24. Równowagą skorelowaną (albo strategią skorelowaną) nazywamy strategię mieszaną π^* (niekoniecznie o niezależnych współrzędnych (tj. rozkładach brzegowych)) zaproponowaną przez zaufaną wyrocznię, która spełnia warunek:

$$(\forall i \in [n])(\forall s_i \in S(\pi_i^*))(\forall \pi_i \in \Delta_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(\pi^*)} (u_i(s) - u_i(\langle \pi_i, s_{-i} \rangle)) \mathbb{P}[\sigma = s | \sigma_i = s_i] > 0,$$

gdzie σ oznacza realizację zmiennej losowej o rozkładzie π^* .

Uwaga 45. Różnica powyższych wypłat jest warunkową wartością oczekiwaną.

Uwaga 46. Aby strategia skorelowana działała, musi istnieć zaufana wyrocznia (instytucja), która zgodnie z jawną strategią skorelowaną przekaże graczom jakie strategie powinni zagrać.

Przykład 26. Przedostatni przykład po przekształceniu afinicznym. Dowolny rozkład postaci macierzowej $((p, 0), (0, 1-p))$. Przykładowo, dla $p = \frac{1}{2}$, średnia wypłata obu graczy to 1.5, co jest lepsze, niż $\frac{2}{3}$ w przypadku MNE.

Twierdzenie 5.2. Każda równowaga Nasha jest równowagą skorelowaną.

Uwaga 47. Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia o równości wypłat.

Uwaga 48. Szukanie równowag Nasha jest trudne, a równowag skorelowanych jest nawet więcej.

Przykład 27 (Gra w cykora).

		s_R	
		C	W
s_K	C	1	10
	W	-10	-100

Równowagi Nasha: (W, C) , (C, W) , $((\frac{10}{11}, \frac{1}{11}), (\frac{10}{11}, \frac{1}{11}))$. Wagi poszczególnych profili strategii: (p, q, r, s) (odpowiednio dla profili $((C, C), (C, W), (W, C), (W, W))$), $p + q + r + s = 1$.

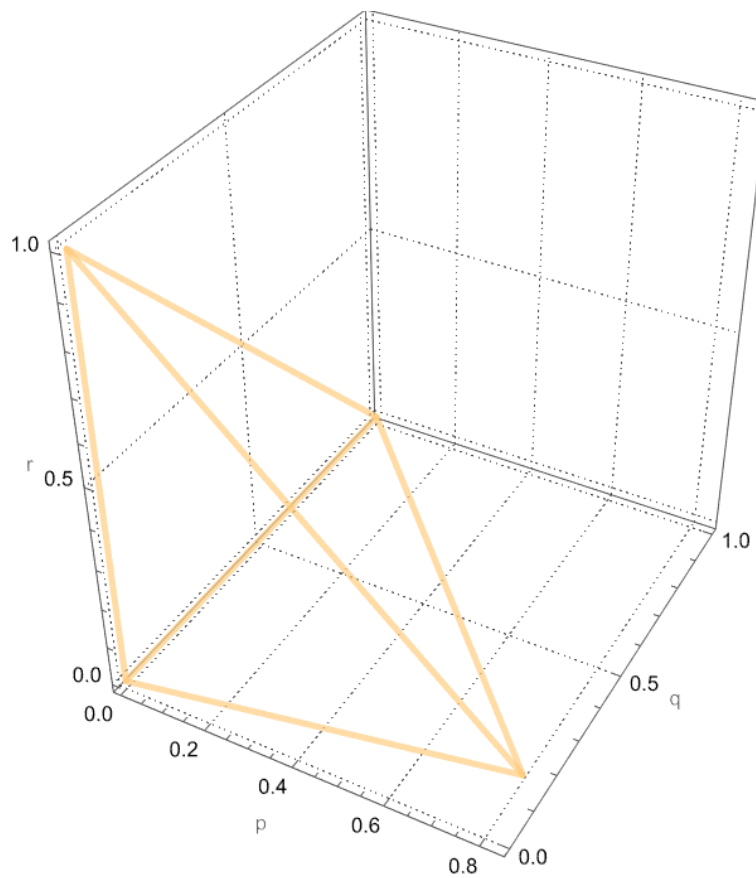
Nierówności równowag skorelowanych:

- gdy 1. gracz ma zagrać cykora: $(1 - 10)p + (-10 - (-100))q \geq 0$,
- gdy 1. gracz ma zagrać wariata $(10 - 1)r + (-100 - (-10))s \geq 0$,
- symetrycznie dla drugiego gracza.

Zatem $10q \geq p$, $10r \geq p$, $\frac{r}{10} \geq s = 1 - p - q - r$ i $\frac{q}{10} \geq s = 1 - p - q - r$.

Szukając optimum możemy np. szukać maksimum sumy wypłat, czyli $2p + 0q + 0r - 200s$. Wtedy $s = 0$, czyli $p + q + r = 1$. Wtedy dwie pierwsze nierówności ograniczają nam p przez $\frac{5}{6}$, co daje rozkład $(\frac{5}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0)$.

Dopuszczalne profile strategii są w $[0, 1]^4$, ale są równocześnie sympleksem 3-wymiarowym, więc można je zanurzyć w przestrzeni trójwymiarowej, tworząc wykres jedynie po zmiennych (p, q, r) (bo $s = 1 - p - q - r$). Okazuje się, że w tym przypadku każda strategia skorelowana jest kombinacją wypukłą 4 powyżej podanych strategii skorelowanych. Wobec tego wielościan równowag skorelowanych wygląda następująco:



Potencjalnych narożników wielościanu jest $\binom{8}{4} = 70$, ale można myśleć, że 8 nierówności występuje parami, jako ograniczenia na dany wymiar, bo niektóre nierówności wynikają z innych jak: $10q \geq p$ i $p \geq 0$ implikują $q \geq 0$. Jeśli patrzeć na to w ten sposób, otrzymamy 4 nierówności, czyli część wspólną 4 półhiper-płaszczyzn zanurzonych w 3 wymiarach, co ogranicza możliwość do co przy zanurzeniu sympleksu w 3 wymiarach da nam w rezultacie wielościan o maksymalnie 5 wierzchołkach.

Uwaga 49. Warunek równowagi skorelowanej wyznacza ciąg nierówności liniowych. Gdy maksymalizujemy sumę wypłat, mamy do czynienia z problemem programowania liniowego.

Twierdzenie 5.3. W grach dwuosobowych, równowagi Nasha są wierzchołkami wielościanów wyznaczonych przez nierówności dla równowag skorelowanych.

6 Wykład 6

6.1 Szukanie równowag Nasha w grach dwumacierzowych

Uwaga 50. Jak działał algorytm szukania równowag Nasha?

1. Wykreśl strategie (ściśle) zdominowane.
2. Heurystycznie należy wyznaczyć nośnik równowag Nasha, rozwiązując układy równań, opartych o tw. o równości wypłat
3. Sprawdź, czy dają one równowagę Nasha.

Uwaga 51. Przypuśćmy, że dla gry dwuosobowej o sumie stałej istnieje wartość gry v . Wtedy gracz 2. chce zminimalizować v przy założeniach:

$$(\forall s_1 \in S_1) \sum_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \pi_2(s_2) \leq v$$

oraz $\sum_{s_2 \in S_2} \pi_2(s_2) = 1, (\forall s_2 \in S_2) \pi_2(s_2) \geq 0$. Jest to oczywiście problem programowania liniowego. Jest to alternatywna opcja szukania równowag dla gier minimaksowych.

Rozważmy teraz gry dwumacierzowe zadane przez macierze $A = [a_{ij}]$ (dla gracza 1.) i $B = [b_{ij}]$ (dla gracza 2.), obie z $\mathcal{M}_{m \times n}$, tj. gdzie gracze mają odp. m i n strategii czystych. Oczywiście oznacza to, że $u(s_1 = i, s_2 = j) = (a_{ij}, b_{ij})$. Niech ponadto π będzie mieszaną równowagą Nasha. Niech $u(\pi) = (v_1, v_2)$. Z tw. o równości wypłat wynika, że

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \pi_2(j) \begin{cases} = v_1 & \text{dla } i \in S_1(\pi_1) \\ \leq v_1 & \text{dla } i \notin S_1(\pi_1) \end{cases}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} \pi_1(i) \begin{cases} = v_2 & \text{dla } j \in S_2(\pi_2) \\ \leq v_2 & \text{dla } j \notin S_2(\pi_2) \end{cases}$$

Z równowagi Nasha wynika, że

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \pi(i, j) = v_1$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \pi(i, j) = v_2$$

Dla uniwersalności, spróbujmy to unormować przez podstawienie $x = \frac{\pi_1}{v_2}$ i $y = \frac{\pi_2}{v_1}$. Zmieni to powyższe układy tak, żeby po prawych stronach były zawsze 1. Ponadto zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_1} = \frac{v_1}{v_1 v_2} + \frac{v_2}{v_1 v_2} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) x_i y_j.$$

Twierdzenie 6.1 (Lemke—Howson). Niech $z = (x++y)^T \in \mathcal{M}_{(m+n) \times 1}$, $\mathbb{1}_{m+n} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathcal{M}_{(m+n) \times 1}$ oraz niech $C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$, gdzie wartości macierzy A oraz B są dodatnie. Wtedy dowolne niezerowe rozwiązanie z^* problemu:

$$z \geq 0 \tag{1}$$

$$\mathbb{1}_{m+n} - Cz \geq 0 \tag{2}$$

$$z^T (\mathbb{1}_{m+n} - Cz) = 0 \tag{3}$$

wyznacza $\pi = \left(\frac{x}{\sum_{i=1}^m x_i}, \frac{y}{\sum_{j=1}^n y_j} \right)$, które jest równowagą Nasha w grze dwumacierzowej z wypłatami zadanymi przez macierze A i B i vice versa, każda równowaga Nasha jest rozwiązaniem tego problemu.

Uwaga 52. Jeśli macierz C ma ujemne wpisy, należy dodać do wypłat z macierzy A i B tę samą stałą, aby uniknąć tego problemu.

Dowód. Niech π będzie równowagą Nasha dla gry o macierzach wypłat A i B . Wtedy

$$0 = \sum_{i=1}^m x_i (1 - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j) + \sum_{i=1}^n y_i (1 - \sum_{i=1}^m b_{ij} x_j) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) x_i y_j.$$

Ponadto

$$\begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \geq 0, \\ 1 - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i \geq 0. \end{cases}$$

Ponieważ π jest rozkładem prawdopodobieństwa, ostatni warunek problemu też jest spełniony.

W drugą stronę, założmy niewprost, że $(x+y)^T$ jest niezerowym rozwiązaniem problemu, a π nie jest równowagą Nasha. Zauważmy, żeby w poprzednim układzie nierówności nie było równości, podczas gdy wcześniejsza równość jest spełniona, rozwiązanie musi być zerowe (tu wykorzystujemy nieujemność elementów z C). Wobec tego

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \begin{cases} = 1 & \text{dla } x_i > 0 \\ < 1 & \text{dla } x_i = 0 \end{cases}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \begin{cases} = 1 & \text{dla } y_j > 0 \\ < 1 & \text{dla } y_j = 0 \end{cases}$$

co jest równoważne z wcześniej wyprowadzonymi układami równań i nierówności. Wobec tego π jest równowagą Nasha. $\square$

Uwaga 53. Problem z tego twierdzenia nazywa się *problemem komplementarności liniowej (LCP)*, gdzie 3. warunek jest warunkiem komplementarności liniowej.

Uwaga 54. Jeśli w dwóch pierwszych warunkach problemu zachodzi $m + n$ równości, to jesteśmy w wierzchołku pewnego wielościanu wypukłego zadanego przez te nierówności. Trzeci warunek sprawia, że w rozwiązaniu zachodzi tyle równości, a ponadto musi być to część wspólna l spośród $2l$ ścian (intuicyjnie: dla każdego wymiaru, 1 z 2 ograniczeń). Zawsze jednym z rozwiązań jest rozwiązanie zerowe.

Definicja 25 (Algorytm Lemkego—Howsona).

1. Niech z będzie rozwiązaniem zerowym, kładziemy $D|r = -C|\mathbb{I}_{m+n}^T$ (niech $D = [d_{ij}]$) oraz ustawiamy liczbę kroków $K = 1$.
2. Wybieramy dowolną kolumnę j_K macierzy D i szukamy $d_{i_K} = \min_i d_{ij_K}$.
3. Podmieniamy elementy macierzy D tak, żeby
 - $d_{i_K j_K} \leftarrow \frac{1}{d_{i_K j_K}}$,
 - $d_{i_K j} \leftarrow -\frac{d_{i_K j}}{d_{i_K j_K}}$, gdy $j \neq j_K$,
 - $r_{i_K} \leftarrow -\frac{r_{i_K}}{d_{i_K j_K}}$,
 - $d_{ij_K} \leftarrow \frac{d_{ij_K}}{d_{i_K j_K}}$, gdy $i \neq i_K$,
 - $d_{ij} \leftarrow d_{ij} - \frac{d_{i_K j} d_{ij_K}}{d_{i_K j_K}}$, gdy $i \neq i_K \wedge j \neq j_K$,
 - $r_i \leftarrow r_i - \frac{r_{i_K} d_{ij_K}}{d_{i_K j_K}}$, gdy $i \neq i_K$.
4. Jeśli $j_1 = i_K$, to kończymy algorytm.
5. W przeciwnym razie $K \leftarrow K + 1$, wstawiamy $j_K = i_{K-1}$, szukamy $d_{i_K} = \min_i d_{ij_K}$ i wracamy do kroku 3.

Gdy w K tym kroku otrzymaliśmy i_K i j_K , to oznacza, że w rozwiązaniu $z_{j_K} = r_{i_K}$, gdzie wartość ta jest brana z końcowego wektora r .

Przykład 28. Z wykładu [P. Więcka](#), ze ss. 12-13.

Uwaga 55. Algorytm $L-H$ ma w najgorszym przypadku złożoność wykładniczą, ale zazwyczaj działa znacznie szybciej.

Uwaga 56. Nie ma gwarancji, że każdą równowagę Nasha można znaleźć przy pomocy algorytmu $L-H$. W szczególności nie ma gwarancji, że można otrzymać jakąkolwiek mieszaną równowagę, która nie jest czysta.

7 Wykład 7

7.1 Gry w postaci ekstensywnej

Definicja 26 (Gra w postaci ekstensywnej (pozycyjnej) (EFG)).

Krotkę $\Gamma = (P, \mathcal{T}, \mathbb{H}, \mathcal{A}, \rho, u)$ nazywamy **grą w postaci ekstensywnej**, jeśli:

1. P to skończony zbiór graczy, do którego zalicza się „**natura**” jako „gracz zerowy”. Wobec tego, będziemy pisać $P = [0 : n] := \{0\} \cup [n]$, gdzie 0 będzie „naturą”, a $[n]$ będzie zbiorem zwykłych graczy.
2. $\mathcal{T} = (V = (D, L), r \in V, \text{pre} : V \setminus \{r\} \rightarrow D, \text{succ} : D \rightarrow \mathcal{P}(V))$ jest skończonym drzewem ukorzenionym o wierzchołkach V i korzeniu r . Zbiór wierzchołków $V = D \cup L$ jest podzielony na zbiór liści L i zbiór wierzchołków decyzyjnych D , do których należy r . Wierzchołki z V reprezentują **stany gry**. W szczególności wierzchołki z L oznaczają **stany końcowe** gry, a D reprezentuje stany, których gracze podejmują decyzje (tzw. **stany decyzyjne**). Ponadto pre jest funkcją, która danemu wierzchołkowi przypisuje poprzednika (ojca) w drzewie, a succ jest funkcją, która danemu wierzchołkowi przypisuje zbiór następników (synów) w drzewie.
3. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}_p)_{p \in P}$ jest partycją zbioru D , zwana **partycją informacyjną**, gdzie każde $\mathbb{H}_p$ jest **partycją zbiorów informacji gracza** p . Oznacza to, że każdy wierzchołek z D odpowiada dokładnie jednemu graczowi. Dla każdego $l \in L$ istnieje najmniejsze $k \in \mathbb{N}$, że $\text{pre}^k(l) = r$. Wtedy $\text{path}(l) := \{\text{pre}^i(l) : i \in [k]\}$ jest ścieżką akcji graczy prowadzących do zakończenia gry l . Wymagamy, aby żaden zbiór informacji H nie kroił się więcej, niż 1 z żadną ścieżką, tj. $(\forall H \in \bigcup \mathbb{H})(\forall l \in L) |H \cap \text{path}(l)| \leq 1$. $\mathbb{H}$ indukuje funkcję $P_V : D \rightarrow P$, która stanowi v przypisuje gracza, który w stanie v podejmuje decyzję.
4. $\mathcal{A} = (A(H))_{H \in \bigcup \mathbb{H}}$ jest rodziną zbiorów dostępnych akcji w każdym zbiorze informacji. Co więcej, $\mathcal{A}$ indukuje funkcję $A_V : D \rightarrow \mathcal{A}$, która dla $v \in H \in \bigcup \mathbb{H}$, zwraca $A_V(v) = A(H)$, co oznacza, że $A_V(v)$ jest zbiorem dostępnych akcji w stanie $v \in H$, niezależnie od wyboru stanu z H . Wobec tego, H można interpretować jako pewną klasę abstrakcji, co oznacza, że gracz p nie jest w stanie rozpoznać, w którym wierzchołku $v \in H$ się znajduje w momencie podejmowania decyzji. Ponadto można w podobny sposób wydefiniować funkcję $a : V \setminus \{r\} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ zadany jako akcja, która podjęta w $\text{pre}(v)$, prowadzi do stanu v .
5. $\rho = (\rho_H)_{H \in \mathbb{H}_0}$ jest wektorem rozkładów prawdopodobieństwa $\rho_H \in [0, 1]^{A(H)}$ losowych akcji „natury”.
6. $u = (u_p)_{p \in [n]}$ jest wektorem profili wypłat zwykłych graczy w stanach końcowych gry L , t.j. $(\forall p \in [n]) u_p : L \rightarrow \mathbb{R}$.

Uwaga 57. Jeśli nie było powiedziane inaczej, to zakładamy, że zbiory akcji zawierają tylko deterministyczne akcje. Ogólnie mogą zawierać pewne strategie mieszane.

Uwaga 58. Część z graczy może znać wyniki losowań post factum (zostaje to ujęte również przy pomocy zbiorów informacyjnych gracza).

Przykład 29 (Gra w 3 zapałki). Mamy stosik z 4 zapałkami i dwóch graczy. Każdy z graczy zabiera od 1 do 3 zapałek ze stosiku. Wygrywa ten, który zabierze ostatnią zapałkę. [drzewo]

Definicja 27. Jeśli $\mathbb{H}_0 = \emptyset$ i $(\forall p \in P \setminus \{0\})(\forall H \in \mathbb{H}_p) |H| = 1$, to mówimy, że jest to **gra o pełnej informacji** (PIEFG). W przeciwnym razie — o **niepełnej informacji** (IIIEFG).

Przykład 30 (Gra z monetami). Natura losuje stronę monety. Gracz 1. próbuje zgadnąć wynik losowania. Jeśli zgadł, to otrzymuje 1, a jeśli przegra, to traci 1.

Definicja 28. Przez $S_p = \prod_{H \in \mathbb{H}_p} A(H)$ określamy zbiór strategii zachowania gracza p . Mówimy, że **strategia** zachowania gracza p jest **czysty**, jeśli wszystkie akcje gracza p w tej strategii są deterministyczne. W przeciwnym razie mówimy o **mieszanej strategii** zachowania. Co więcej, $S := \prod_{p \in P} S_p$ jest zbiorem strategii w grze Γ .

Uwaga 59. Gdy $(\forall p \in P) s_p \in S_p$ są strategiami czystymi, to gra Γ przyjmuje postać strategiczną.

Uwaga 60. Wszystkie dotychczasowe pojęcia jak np. równowagi Nasha, najlepsze odpowiedzi, optima Pareta, czy gry o sumie stałej, definiujemy w ten sam sposób jak wcześniej.

8 Wykład 8

Przykład 31. „Natura” rzuca symetryczną monetą (zarówno orzeł, jak i reszka, wypadają z pr. $\frac{1}{2}$). Pierwszy gracz zgaduje co wypadło. Potem drugi gracz zgaduje, czy pierwszy gracz zgadł. Zgadnięcie daje wypłatę 1., a niezgadnięcie — -1. Każda strategia czysta jest równowagą Nasha. Także każda strategia mieszana. Jeśli moneta nie jest symetryczna, to sprawa się nieco zmienia.

Definicja 29 (Podgra w postaci ekstensywnej).

Niech $\Gamma = (P, \mathcal{T}, \mathbb{H}, \mathcal{A}, \rho, u)$ będzie EFG.

Na V wprowadzamy najmniejszą relację częściowego porządku $\leq$, która rozszerza $\{(v, \text{pre}(v)) : v \in V \setminus \{r\}\}$ (standardowy porządek na drzewach ukorzenionych). Rozważmy teraz $H \in \bigcup \mathbb{H}$ takie, że $H = \{w\}$ dla pewnego $w \in V$. Zdefiniujemy $V_w = \{v \in V : v \leq w\}$. **Podgrą** Γ' gry Γ , o korzeniu w , nazywamy grę Γ obciętą do drzewa o wierzchołkach V_w .

Uwaga 61. Zbiory D, L kroimy z V_w , a $\mathbb{H}_p$ z $\mathcal{P}(V_w)$. Reszta definicji jest wyprowadzana dla tych obcięć. M.in. zbiór graczy można ograniczyć do $P_V[V_w]$.

Uwaga 62. Podobna konstrukcja dla w , który należy do większego zbioru informacji, jest niezdefiniowana.

Przykład 32 (Arbitralne drzewko gry z pełną informacją).

Definicja 30. **Strategią postępowania gracza p** nazywamy produkt $\prod_{H \in \mathbb{H}_p} \pi_{A(H)}$ niezależnych rozkładów na zbiorach akcji gracza p . Produkt takich strategii dla wszystkich graczy nazywamy **strategią postępowania w grze**.

Twierdzenie 8.1 (Kuhn). W PIEFG, strategię postępowania są równoważne ze strategiami mieszanymi.

Uwaga 63. Stąd wynika, że definicja EFG dla zrandomizowanych zbiorów akcji jest także poprawna, tzn. niekoniecznie obchodzi nas jakiemu typowi są akcje graczy.

Wniosek z poprzedniego tw. to

Twierdzenie 8.2 (Kuhn). Każda PIEFG ma MNE.

Twierdzenie 8.3 (Kuhn). Każda PIEFG ma PNE.

Dowód. Szkic — wykonujemy indukcję wsteczną ze względu na rozmiar drzewa „od dołu”. Dla $|D| = 1$, gracz ma najlepszą odpowiedź.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie podgry o korzeniach ze zbioru $\text{succ}(r)$ mają PNE. Wtedy $P_V(r)$ musi wybrać jedną ze swoich akcji z $A_V(r)$. Ale biorąc pod uwagę, że w strategii wszystkich graczy w podgrach są zgodne z PNE (bo nie opłaca im się od niej odstępować, to $P_V(r)$ ma najlepszą odpowiedź wybraną poprzez najlepszą dla niego wartość oczekiwaną wypłat. $\square$

Przykład 33 (c.d.).

Definicja 31 (Równowaga doskonała (Subgame Perfect Equilibrium; SPE)). **Równowagą doskonałą** nazywamy taki profil strategii, że w każdej podgrze jest on równowagą (mieszaną) Nasha.

Przykład 34 (Przykład EFG z niepełną informacją; w postaci strategicznej; metoda wyznaczania SPE).

Przykład 35.

9 Wykład 9

9.1 Aukcje

Definicja 32 (Aukcja). **Aukcją** nazywamy grę (domyślnie w postaci strategicznej), gdzie każdy z graczy p składa (w tajemnicy) pewną ofertę w_p za jakieś dobro, które według nich warte jest v_p . Na podstawie strategii graczy (ofert) i wartości licytowanego przedmiotu, podawane są wypłaty u oraz zwycięzcy aukcji (którzy dostają dobro). Z reguły jest jeden zwycięzca, ale niekoniecznie musi mieć on największą wypłatę. Z punktu widzenia teorii gier, zwycięzcy nie są istotni.

Przykład 36 (Prymitywna aukcja). Rozważmy aukcję, w której zwycięzcą zostaje gracz, który zalicytował najwyżej, ale dobro dostaje za darmo. Wobec tego

$$u_p = \begin{cases} v_p & , \text{ jeśli } w_p = \max_{i \in P} w_i \\ 0 & \text{ w przeciwnym przypadku .} \end{cases}$$

Aukcja ta jest nierozsądna, bo każdemu opłaca się licytować jak najwyżej. Wobec tego ta gra nie ma żadnej równowagi.

Przykład 37 (Aukcja pierwszej ceny). Zwycięzcą zostaje gracz, który wylicytował najwyżej, i tyle też płaci. Wobec tego,

$$u_p = \begin{cases} v_p - w_p & , \text{ jeśli } w_p = \max_{i \in P} w_i \\ 0 & \text{ w przeciwnym przypadku .} \end{cases}$$

Powiedzmy, że gracz p -ty uznał przedmiot za najbardziej wartościowy. Przypuśćmy, że druga największa wartość to $v_{p'} = v_p - 1$. Zauważmy, że graczowi p nie opłaca się licytować $v_p - 2$, bo wtedy wygra gracz p' , jeśli zalicytuje $v_{p'}$. Z drugiej strony, mógłby licytować $v_p - 0.99$ i wygrać licytację z zyskiem 0.99. Ale nie wie, że druga największa wartość wynosi $v_p - 1$. Zakładając, że poza wypłatą, istotne w drugiej kolejności jest zwycięstwo, to za rozwiązanie można uznać zagranie przez wszystkich graczy $w_p = v_p$.

Przykład 38 (Aukcja Vickreya (aukcja drugiej kwoty)). Dla każdego gracza i , przedmiot (np. grafika Banksy'ego) wystawiany na aukcji ma wartość v_i . Każdy z graczy licytuje $w_i = v_i$ (w sposób niejawni, np. w kopertach). Wygrywa gracz z maksymalnym w_i (w przypadku remisu, losujemy zwycięzcę). Gracz wygrywający i płaci $v^* = \max_{j \in P \setminus \{i\}} v_j$, czyli wypłata jest zadana wzorami: $u_i(s) = v_i - v^*$, jeśli strategia s prowadzi do wygranej gracza i , a $u_i(s) = 0$, gdy s oznacza, że aukcję wygrał inny gracz.

Twierdzenie 9.1 (Vickrey). Zagranie $w_p = v_p$ w Aukcji Vickreya jest optymalne (jest to równowaga Nasha).

Dowód. Przypuśćmy, że w_p wygrywa. Przypuśćmy, że wtedy gracz p płaci w^* , więc $u_p = v_p - w^* \geq 0$. Przypuśćmy, że gracz p zagra w'_p i wciąż wygra. Wtedy jego wypłata się nie zmieni. Jeśli by nie wygrał, to $u_p = 0$, więc wypłata się nie polepszy.

Przypuśćmy, że w_p nie wygrywa, czyli $u_p = 0$. Dopóki w'_p nie będzie większe od $w_{p'} = \max_{i \in P} w_i$, to $u_p = 0$. Gdy jednak będzie większe, to $u_p = w'_p - w_{p'} < 0$. □

Uwaga 64. Twierdzenie Vickreya może być postrzegane jako przejaw, znanej z książki Adama Smitha z 1776, idei „niewidzialnej ręki”.

„[Każdy] myśli tylko o swym własnym zarobku, a jednak w tym, jak i w wielu innych przypadkach, jakaś niewidzialna ręka kieruje nim tak, aby zdążał do celu, którego wcale nie zamierzał osiągnąć. Społeczeństwo zaś, które wcale w tym nie bierze udziału, nie zawsze na tym źle wychodzi. Mając na celu swój własny interes, człowiek często popiera interesy społeczeństwa skuteczniej niż wtedy, gdy zamierza służyć im rzeczywiście. Nigdy nie zdarzyło mi się widzieć, aby wiele dobrego zdziałali ludzie, którzy udawali, iż handlują dla dobra społecznego.”

Adam Smith, *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*

Definicja 33. Niech V_i oznacza zbiór możliwych wartości licytowanych przedmiotów przez gracza i . $V = \prod_{i \in P} V_i$ oraz $V_{-i} = \prod_{j \in P \setminus \{i\}} V_j$.

Mechanizm bezpośredniego ujawnienia (ang. *direct revelation mechanism*) (f, p) składa się z **funkcji wyboru społecznego** (ang. *social choice function*) $f : V \rightarrow A$, gdzie A to **zbiór możliwych rozstrzygnięć**, dla których gracze wyznaczają walucje v_i , oraz $p = (p_1, \dots, p_n)$, gdzie $p_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, które są **płatnościami graczy** za grę w danej aukcji.

Funkcją dobra społecznego (ang. *social welfare function*) nazywamy funkcję $F \in \mathbb{R}^A$, określoną wzorem $F(a) = \sum_{i \in P} v_i(a)$.

Definicja 34. Mówimy, że mechanizm $(f, (p_1, \dots, p_n))$ jest **zgodny z motywacją** (ang. *incentive compatible*), jeśli

$$(\forall i \in P)(\forall V_i)(\forall V_{-i}) f(\langle v_i, v_{-i} \rangle) - p_i(\langle v_i, v_{-i} \rangle) \geq f(\langle v'_i, v_{-i} \rangle) - p_i(\langle v'_i, v_{-i} \rangle).$$

Uwaga 65. $f(\langle v_i, v_{-i} \rangle)$ może być postrzegane jako $v_i(a)$ dla pewnego $a \in A$.

Intuicja jest taka, że gracz i woli podać prawdziwą wartość v_i , niż fałszywą.

Definicja 35 (Mechanizm Vickreya — Clarke’a — Groovesa). Jest to mechanizm bezpośredniego ujawnienia, gdzie $f(v) \in$

$$\arg \max_{a \in A} \left(\sum_{i \in P} v_i(a) \right) \text{ i istnieją funkcje (dla } i \in P) h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ że } (\forall v \in V) p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v))$$

Uwaga 66. Oznacza to, że wszyscy gracze płacą swoją wartość pozostałym. Jeśli chcą zapłacić ponadto swoją wartość, to ta optymalizacja polega na maksymalizacji dobra wspólnego $(\sum_{i \in P} v_i(a))$ (social welfare)).

Twierdzenie 9.2 (VCG). Każdy mechanizm VCG jest zgodny z motywacją.

Dowód. Niech $a = f(\langle v_i, v_{-i} \rangle)$ i $a' = f(\langle v'_i, v_{-i} \rangle)$ dla ustalonych $i, v_i, v'_i, u_i(v) = \sum_{i \in P} v_i(a) - h_i(v_{-i})$, a $u_i(\langle v'_i, v_{-i} \rangle) = v'_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a') - h_i(v_{-i})$. Ale a maksymalizuje dobro wspólne, więc $u_i(v) \geq u_i(\langle v'_i, v_{-i} \rangle)$. $\square$

Uwaga 67. Prosto by było przyjąć $h \equiv 0$ w definicji mechanizmu VCG. W grze dla wielu graczy oznaczałoby to, że gracze sporo na tym tracą.

Definicja 36. Mówimy, że mechanizm jest **indywidualnie racjonalny**, jeśli

$$(\forall i \in P) v_i(f(v)) - p(v) \geq 0.$$

Mówimy, że mechanizm **nie ma pozytywnego przepływu**, jeśli

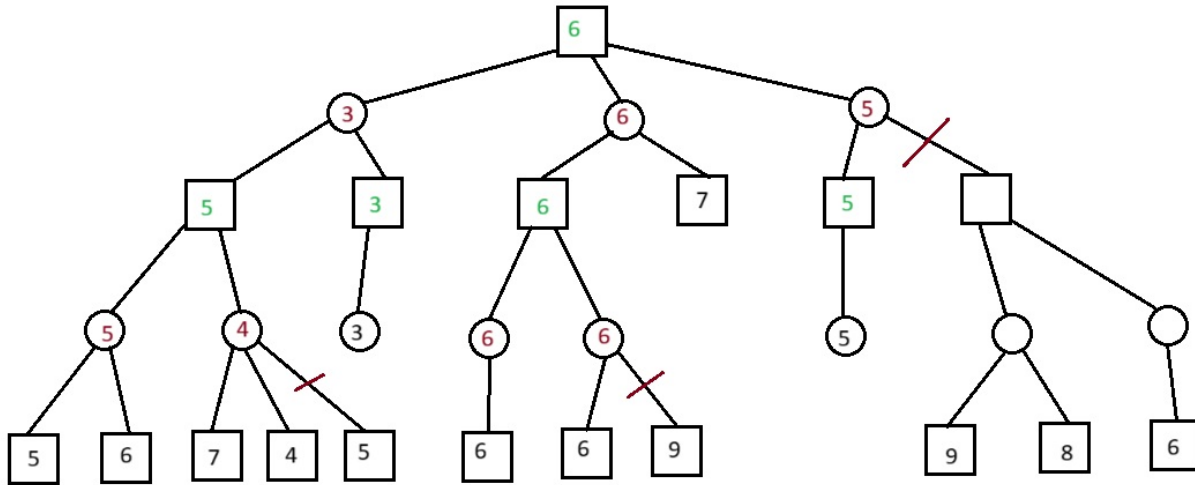
$$(\forall i \in P) p_i(v) \geq 0.$$

Definicja 37 (Reguła Clarke’a (Clark’s pivot rule)). $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ nazywamy **wypłatą Clarke’a**. Wtedy $p_i(v) = \max_{b \in A} (v_i(b) - v_i(a))$, gdzie $a = f(v)$.

Twierdzenie 9.3 (Clarke). Mechanizm VCG z regułą Clarke’a nie ma pozytywnych przepływów. Jeśli $(\forall v_i \in V_i)(\forall a \in A) v_i(a) \geq 0$, to jest indywiduallynie racjonalny.

Dowód. Niech $a = f(v)$ maksymalizuje $\sum_{i \in P} v_i(a)$ oraz $b \in A$ maksymalizuje $\sum_{j \neq i} v_j(b)$. Zauważmy, że $u_i(a) = v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_{i \in P} (v_i(a) - v_i(b)) \geq 0$. Pierwsza część: Skoro $b \in A$ maksymalizuje $\sum_{j \neq i} v_j(b)$, to $\sum_{j \neq i} (v_j(b) - v_j(a)) \geq 0$. $\square$

Przykład 39 (Aukcja Vickreya).



10 Wykład 10

10.1 Algorytm alfa-beta

Twierdzenie 10.1 (Algorytm alfa-beta). *Dana jest dwuosobowa EFG o sumie stałej. Określamy $\text{minmax}(v, \text{lev}) = \text{return } \text{alfabeta}(v, \text{lev}, -\infty, \infty)$, gdzie:*

Taki algorytm zwraca wartość gry dla równowagi doskonałej w grze o pełnej informacji.

procedure Alfabeta ($v, \text{lev}, \alpha, \beta$)

```

1  if  $v \in L$  then                                     // koniec gry
2  |   return  $u(v)$ 
3
4  if  $P_V(v) = 1$  then                                   // tura 1. gracza
5  |   forall  $s \in \text{succ}(v)$  do
6  |   |    $\alpha = \max(\alpha, \text{Alfabeta}(w, \text{lev}+1, \alpha, \beta))$ 
7  |   |   if  $\alpha \geq \beta$  then
8  |   |   |   odcinamy gałąź Beta
9  |   |   return  $\alpha$ 
10
11 if  $P_V(v) = 2$  then                                   // tura 2. gracza
12 |   forall  $s \in \text{succ}(v)$  do
13 |   |    $\beta = \min(\beta, \text{Alfabeta}(w, \text{lev}+1, \alpha, \beta))$ 
14 |   |   if  $\alpha \geq \beta$  then
15 |   |   |   odcinamy gałąź Alpha
16 |   |   return  $\beta$ 

```

Przykład 40. Gra o sumie zerowej. Kwadraty oznaczają maksymalizację przez 1. gracza, a kółka — minimalizację przez 2. gracza. kolorem czarnym oznaczone są wypłaty 1. gracza w stanach końcowych gry. Kreski oznaczają Alfa-cięcia (nie ma tutaj Beta-cięcia).

10.2 Gry koalicyjne

Definicja 38 (Gra w postaci koalicyjnej/kooperatywnej). **Gra koalicyjna z wypłatami ubocznymi** (ang. *transferable utilities*) to para (P, v) , gdzie P to skończony zbiór graczy, a $v : \mathcal{P}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia $v(\emptyset) = 0$ i $v(S)$ zadaje **siłę koalicyjną** (wartość koalicyjną) koalicji $S \subseteq P$, gdzie $v(S)$ ma być rozdyskutowana między graczy w koalicji S .

Zbiór P nazywamy **wielką koalicyją**.

Uwaga 68. Dopuszcza się, że gracze wymieniają pieniądze między sobą tak, aby gracze z koalicji S otrzymali w sumie wypłaty równe $v(S)$.

Definicja 39. Mówimy, że gra kooperacyjna jest nad-addytywna, gdy

$$(\forall S, T \subseteq P) ((S \cap T = \emptyset) \rightarrow (v(S) + v(T) \leq v(S \cup T))) .$$

Gra jest monotoniczna, gdy

$$(\forall S \subseteq T \subseteq P) v(S) \leq v(T) .$$

Mówimy, że gra kooperacyjna jest wypukła, gdy

$$(\forall S, T \subseteq P) (v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T)) .$$

Uwaga 69. Nad-addytywność oznacza opłacalność łączenia się w większe koalicje.

Wypukłość oznacza, że gracze mają niemniejsze wpływy w większych koalicjach.

Każda gra wypukła jest grą nad-addytywną.

Przykład 41 (Upadłość spółki). Spółka była winna pieniądze wierzycielom (graczom). Masa upadłościowa spółki M jest mniejsza od całkowitego długu $\sum_{i \in P} d_i$ (d_i to dług spółki wobec i -tego gracza). Wierzyciele muszą ustalić, którzy z nich przejmują masę upadłościową spółki i spłacają pozostałych wierzycieli. Wobec tego, dla koalicji S , która przejmując masę upadłościową, możemy określić: $v_1(S) = \max\{0, M - \sum_{i \notin S} d_i\}$ — ile zostanie S po spłaceniu pozostałych wierzycieli. Wtedy każdy

z graczy $i \notin S$ otrzymuje d_i , ile $v_1(S) > 0$, a pewną część d_i , gdy $v_1(S) = 0$.

Podobnie, dla S , która pierwsza (bez uwzględnienia innych) realizuje swoją wierzytelność, określamy $v_2(S) = \min\{M, \sum_{i \in S} d_i\}$.

Wtedy gracze spoza S , rozdzielają między sobą $M - \sum_{i \in S} d_i$.

Gra (P, v_1) jest nad-addytywna, a (P, v_2) — nie.

Wobec superaddytywności v_1 , w pierwszej grze opłaca im się utworzyć wielką koalicję.

Przykład 42. Dla gry $(\{1, 2, 3\}, v_1)$ oraz $M = 37$, $d = (15, 20, 30)$, mamy: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 2$, $v(\{1, 2\}) = 7$, $v(\{1, 3\}) = 17$, $v(\{2, 3\}) = 22$ i $v(\{1, 2, 3\}) = 37$.

Dla gry $(\{1, 2, 3\}, v_2)$ oraz $M = 37$, $d = (15, 20, 30)$, mamy $v(\{1\}) = 15$, $v(\{2\}) = 20$, $v(\{3\}) = 30$, $v(\{1, 2\}) = 35$, $v(\{1, 3\}) = 37$, $v(\{2, 3\}) = 37$ i $v(\{1, 2, 3\}) = 37$.

Fakt 10. Niech $(P = [n], S, u)$ będzie grą w postaci normalnej. Wtedy (P, v) jest grą w postaci koalicyjnej, gdzie, dla $T \subset P$:

$$v(T) = \max_{\pi_T \in \Delta_T^*} \min_{\pi_{-T} \in \Delta_{-T}^*} \sum_{i \in T} u_i(\langle \pi_T, \pi_{-T} \rangle) . \quad (4)$$

Uwaga 70. $\Delta_T = \times_{i \in T} \Delta_i$, a $\Delta_{-T} = \times_{i \notin T} \Delta_i$.

Fakt 11. Każdą grę nad-addytywną można otrzymać z pewnej gry w postaci normalnej za pomocą wzoru (4).

Definicja 40. Niech $P = [n]$. Wektorem wypłat w grze koalicyjnej, nazywamy $x \in \mathbb{R}^n$. Jest on

- racjonalny grupowo (alokacja/podziałem), jeśli $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$,
- racjonalny indywidualnie, jeśli $(\forall i \in [n]) v(\{i\}) \leq x_i$,
- racjonalny koalicyjnie (jest stabilny), gdy $(\forall S \subseteq P) v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$,
- imputacją, jeśli jest indywidualnie racjonalną alokacją.

Fakt 12. Nad-addytywna gra koalicyjna posiada podział.

Definicja 41. Zbiór $\mathcal{C}(v)$ stabilnych podziałów nazywamy rdzeniem gry.

Uwaga 71. Rdzeń gry może być pusty. Rdzeń jest domknięty i wypukły.

Przykład 43 (Napad na bank). Do przeniesienia 1 sztaby złota potrzeba 2 osób. Do banku z olbrzymią liczbą sztab złota włamuje się n włamywaczy (graczy). Mają czas tylko na jedno przejście.

$$v(S) = \begin{cases} \frac{|S|}{2} & , \text{ gdy } 2 \mid |S| , \\ \frac{|S|-1}{2} & , \text{ gdy } \neg(2 \mid |S|) . \end{cases}$$

Przypuśćmy, że $|P| = n$ i $\neg(2 \mid n)$. Rozważmy dowolny $S \subset P$, że $|S| = n-1$. Wtedy $v(P) = \frac{n-1}{2}$ oraz $v(S) = \frac{n-1}{2} \leq \sum_{i \in S} x_i$. Oznacza to, że $x_i \leq 0$ dla $i \notin S$. Wobec dowolności S , $\sum_{i \in P} x_i \leq 0 < v(P)$. Dlatego wtedy rdzeń jest pusty.

11 Wykład 11

Definicja 42. Mówimy, że gracze $i, j \in P$ są **zamienni względem v** , jeśli $(\forall S \subseteq P) ((i, j \notin S) \rightarrow (v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})))$.

Gracz i jest **nieistotny względem v** , gdy $(\forall S \not\ni i) v(S) = v(S \cup \{i\})$.

Mówimy, że gracz i ma **prawo weta**, jeśli $v(P \setminus \{i\}) = 0$ i $v[P(P)] \subset [0, \infty)$.

Jeśli $v[P(P)] \subseteq \{0, 1\}$, to mówimy, że (N, v) jest grą **prostą**.

Uwaga 72. Równoważnie: gra koalicyjna jest prosta, jeśli $(\forall S \subseteq P) v(S) \in \{0, 1\}$.

Fakt 13. Dla gier prostych w postaci koalicyjnej, gra ma niepusty rdzeń wtedy i tylko wtedy, gdy ma graczy z prawem weta. Składa się on wtedy z podziałów, gdzie gracze z prawem weta dostają sumaryczną wypłatę 1.

Definicja 43. Rozwiązaniem gry (P, v) nazywamy pewien zbiór podziałów $\Psi(v)$, zależny od wyboru v . Jeśli rozwiązanie jest jednoelementowe, to $\Psi(v)$ nazywamy **wartością gry**, a $\Psi_i(v)$ nazywamy **wartością i -tego gracza**.

Uwaga 73. Czasami rozwiązanie Ψ jest postrzegane jako multifunkcja argumentu v , określona na pewnym zbiorze dopuszczalnych funkcji sił koalicyjnych.

Definicja 44 (Shapley value (1951) — Nobel z ekonomii w 2012).

Wartością Shapleya nazywamy wartość gry, dla $i \in P$ zadaną wzorem:

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq P \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|P \setminus S| - 1)!}{|P|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Uwaga 74. Wartość Shapleya gracza i mówi jaki jest średni wkład w siłę koalicyjną tego gracza po wszystkich możliwych liniowych porządkach dodawania pojedynczych graczy do koalicji.

Przykład 44. 8 fabryk: L, R, M_1, M_2 produkują odpowiednio lewe i prawe Twixy, a ostatnie dwie — opakowania. Rozważmy prostą grę. Aby skomponować batonik, potrzeba 1 lewego i 1 prawego i opakowanie. Każda fabryka produkuje tyle samo sztuk na godzinę. Wobec czego, fabryki muszą kooperować ze sobą trójkami, żeby mogli sprzedać produkt końcowy. $v(S) = 1$ tylko wtedy gdy $\{L, R, M_1\} \subseteq S$ lub $\{L, R, M_2\} \subseteq S$. W przeciwnym razie, wynosi 0. $\Psi_L(v) = \frac{1}{24}(2 + 2 + 6) \cdot 1 = \frac{5}{12} = \Psi_R(v)$. $\Psi_{M_1}(v) = \Psi_{M_2}(v) = \frac{1}{24} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{12}$. Fabryki L i R mają prawo weta.

Fakt 14. W grach wypukłych, wartość Shapleya jest w rdzeniu gry.

Fakt 15 (Własności SV).

- **Wydajność:** Wartość Shapleya jest podziałem.
- **Symetria:** Dla wszystkich i, j , które są zamienne względem v , zachodzi $\Psi_i(v) = \Psi_j(v)$.
- **Liniowość:** $\Psi_i(av + bw) = a\Psi_i(v) + b\Psi_i(w)$.
- **Nieistotny gracz:** Jeśli i jest nieistotny wzgl. v , to $\Psi_i(v) = 0$.

Uwaga 75. Wartość Shapleya, to jedyna wartość gry, która spełnia powyższe 4 własności. Ponadto spełnia poniższy warunek:

• **Addytywność:** Gdy v jest nad-addytywna, to $\Psi(v)$ jest indywidualnie racjonalna. Jeśli jest pod-addytywna, to $\Psi_i(v) \leq v(\{i\})$ dla wszystkich i . Jeśli jest addytywna, to zachodzi równość.

Uwaga 76 (Predykcja). Zbiór pewnych cech, których używamy do predykcji możemy uznać za graczy. Siły koalicji będą wskazywały na jakość predykcji. Wtedy wartość Shapleya można użyć w kontekście analizy wariancji ANOVA, czy w machine learningu (np. LIME) Podobny model można wykorzystać w szeregach czasowych do zdefiniowania slidShap (X 2023), gdzie siły koalicyjne są wyznaczane przy pomocy entropii Shannona, a który to służy do predykcji przyszłych wartości ciągu wektorów losowych.

Twierdzenie 11.1 (Bondareva(1963)—Shapley(1967)). Dla gry w postaci koalicyjnej, warunek:

$$(\forall i \in P) (\forall \alpha : P(P) \rightarrow [0, 1]) \left(\left(\sum_{S \ni i} \alpha(S) = 1 \right) \rightarrow \left(\sum_S \alpha(S) v(S) \leq v(P) \right) \right)$$

jest równoważny z posiadaniem niepustego rdzenia.

Definicja 45 (Indeksy siły Shapleya-Shubika i Banzhafa). Rozważmy prostą grę. $v(S) = 1$ oznacza, że można uformować koalicję S , która może rządzić (wygrywa wybory). Zakładamy, że:

- $v(P) = 1$
- $v(\emptyset) = 0$
- v jest funkcją niemalejącą.
- Dla $S \subseteq P$, jeśli $v(S) = 1$, to $v(P \setminus S) = 0$.

Indeksem siły Shapleya-Shubika i -tego gracza $Sh(i)$ jest wartość Shapleya i -tego gracza w takiej grze.

Niech $S \subseteq P$. Określamy $K(S) = \{i \in S : v(S) = 1, v(S \setminus \{i\}) = 0\}$ — zbiór kluczowych koalicjantów w koalicji S .

Indeksem Banzhafa gracza i nazywamy proporcję:

$$B(i) = \frac{|\{S \subseteq P : i \in K(S)\}|}{\sum_{j \in P} |\{S \subseteq P : j \in K(S)\}|}.$$

Uwaga 77. W grach prostych:

$$\sum_{i \in P} Sh(i) = \sum_{i \in P} B(i) = 1.$$

Uwaga 78. Przykład z fabrykami można uznać za przykład równoważny z formowaniem koalicji. Wobec tego wyliczyliśmy indeks Shapleya-Shubika już wcześniej.

Policzymy indeks Banzhafa. Mamy tylko 3 możliwe koalicje: LRM_1 , LRM_2 i LRM_1M_2 . L oraz R są kluczowe we wszystkich koalicjach, natomiast M_1 i M_2 tylko w dwóch pierwszych (kluczowi gracze są podkreśleni).

Oznacza to, że: $B(L) = B(R) = \frac{3}{8} = 0.375$ oraz $B(M_1) = B(M_2) = \frac{1}{8} = 0.125$.

Widać, że wartości indeksów różnią się istotnie.

Uwaga 79 (Paradoks de Condorceta (XVIII w.)). Wyobraźmy sobie, że mamy 3 kandydatów A, B, C oraz 3 wyborców z preferencjami: $A <_1 B <_1 C$, $B <_2 C <_2 A$ oraz $C <_3 A <_3 B$.

Chcą przegłosować najlepszego kandydata większością głosów. Jeśli każdy zagłosuje na najlepszego kandydata podług swojej preferencji, to mamy impas. Powiedzmy, że 1. wyborca dowiedział się, że 3. zagłosuje na kandydata B i powiedział 2. wyborcy o tym oraz o tym, że on nie zagłosuje na A . W ten sposób dogadali się, że obaj zagłosują na kandydata C tak, jak chce gracz pierwszy.

Gracz 2. wybiera „mniejsze zło”, bo ktoś zasugerował mu, że jest tylko 2 potencjalnych kandydatów.

Przykład 45 (Kompas polityczny). Przykład z OmatKo!!!

12 Wykład 12

12.1 Twierdzenie Arrowa

Definicja 46. Niech L będzie zbiorem liniowych porządków na zbiorze wszystkich możliwych rozstrzygnięć A . **Funkcja społecznej preferencji** (w skrócie: *FSP*) to pewna ustalona funkcja $F : L^P \rightarrow L$.

- Mówimy, że *FSP* jest **jednomyślna**, jeśli dla $< \in L$, $F(<^P) = <$.
- Mówimy, że gracz $i \in [n]$ jest **dyktatorem** jeśli

$$(\forall < = (<_1, <_2, \dots, <_n) \in L^n) F(<) = <_i.$$

- *FSP* jest **niezależna względem nieistotnych alternatyw** (ma własność słabej optymalności Pareta, jeśli

$$(\forall a, b \in A)(\forall <_1, <_2, \dots, <_n, <'_1, <'_2, \dots, <'_n \in L) \\ (< = F(<_1, <_2, \dots, <_n) \wedge <' = F(<'_1, <'_2, \dots, <'_n) \wedge (\forall i \in P)(a <_i b \leftrightarrow a <'_i b)) \rightarrow (a < b \leftrightarrow a <' b).$$

Twierdzenie 12.1 (Arrow). Niech $|A| > 2$ i *FSP* będzie jednomyślna i niezależna względem nieistotnych alternatyw. Wtedy w grze istnieje dyktator.

Uwaga 80. Istnieją gry bez dyktatora, które są jednomyślne albo niezależne względem nieistotnych alternatyw.

12.2 Gry na sieciach

Uwaga 81. Przez $\mathbb{R}_+$ będziemy oznaczali półprostą $[0, \infty)$.

Definicja 47. Gra na sieciach (nieatomowa samolubna gra w routing) zadana jest przez krotkę $(G = (V, E), c : E \rightarrow \mathbb{R}_+, P, T, Q = \{(s_i, t_i, d_i) : i \in T\})$, gdzie:

1. G jest grafem skierowanym. V symbolizują punkty, między którymi przesyłane są ładunki (np. routery i dane), a E symbolizują drogi, po których przesyłane są ładunki.
2. Dla $e \in E$, $c_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest niemalejącą i ciągłą funkcją, która ładunkowi przypisuje czas jego przesyłu.
3. P jest zbiorem graczy. T jest zbiorem typów. Każdy gracz ma jeden typ. Do jednego typu może przynależeć kilku graczy.
4. Dla każdego typu i mamy określone:
 - $s_i \in V$ — źródło
 - $t_i \in V$ — ujście
 - $d_i > 0$ — ilość przesyłanego ładunku z s_i do t_i .

d_i jest sumarycznym ładunkiem wysyłanym przez graczy, którzy są typu i .

Uwaga 82. Funkcja kosztu względem ładunku może być uznawana za funkcję opóźnienia względem przeciążenia.

Definicja 48 (Równowaga Wardropa). Niech Π będzie zbiorem wszystkich ścieżek (skierowanych) w G (można założyć, że ścieżki są podzbiorami krawędzi, a nawet, że ścieżki nie zawierają cykli). Gdy $p \in \Pi$, to piszemy, że $p \sim (s, t)$, jeśli s jest źródłem p , a t jest jej ujściem.

Funkcję $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy **przepływem**.

Przepływ nazywamy **dopuszczalnym**, jeśli

$$(\forall i \in T) \sum_{p \sim (s_i, t_i)} f(p) = d_i.$$

Ponadto, dla zadanego dopuszczalnego przepływu f , dla każdej krawędzi $e \in E$, określamy $f_e = \sum_{p \ni e} f(p)$. Dla $p \in \Pi$,

określamy koszt ścieżki p jako $c_p(f) = \sum_{e \in p} c_e(f_e)$.

Rozwiązanie dopuszczalne f nazywamy **równowagą (samolubną) Wardropa w grze**, jeśli

$$(\forall i \in T) \left(\forall p, q \in \Pi \right) (p, q \sim (s_i, t_i)) \rightarrow (f(p) > 0 \leftrightarrow c_p(f) \leq c_q(f)).$$

Uwaga 83. W równowadze Wardropa wybierane są jedynie ścieżki, które gwarantują najkrótszy czas przesyłu.

Powyższy warunek przypomina twierdzenie o równości wypłat dla równowagi Nasha w grach w postaci strategicznej. Wobec tego, żaden z graczy nie będzie chciał odstąpić od ścieżki o najmniejszym koszcie.

Przykład 46. Paradoxs Braessa (z ćw.)

Twierdzenie 12.2. Równowaga Wardropa zawsze istnieje i jest unikalna.

Twierdzenie 12.3. Rozważmy grę (G, c, P, T, Q) . Niech dla wszystkich $e \in E$, c_e będzie różniczkowalna i wypukła. Niech $C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e)$ będzie kosztem przepływu f . Rozwiązanie f minimalizuje C wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f(p) > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} c'_e(f_e) \leq \sum_{e \in q} c'_e(f_e) \right).$$

Twierdzenie 12.4. Rozwiązanie dopuszczalne f jest równowagą Wardropa wtedy i tylko wtedy, gdy minimalizuje funkcję potencjału:

$$\varphi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x) dx.$$

Dowód. Niech $\varphi_e(x) = \int_0^x c_e(\xi) d\xi$. Wtedy $\varphi(f) = \sum_{e \in E} \varphi(f_e)$ oraz $\varphi'_e(x) = c_e(x)$ jest niemalejąca. Wobec tego, φ_e jest wypukła, czyli z poprz. tw., f minimalizuje φ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f_p > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} c_e(f_e) \leq \sum_{e \in q} c_e(f_e) \right),$$

czyli f jest równowagą. □

Uwaga 84. Można rozważać inne miary i je optymalizować, np. maksimum czasów przesyłu, czy średnie opóźnienie w przesyśle przez wszystkie krawędzie:

$$c(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) \cdot f_e = \sum_{p \in \Pi} c_p(f) \cdot f_p.$$

Twierdzenie 12.5. Niech c_e będzie różniczkowalne dla wszystkich $e \in E$ oraz $xc_e(x)$ będzie funkcją wypukłą. Wtedy f minimalizuje c , jeśli

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f_p > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} (c_e(f_e) + f_e c'_e(f_e)) \leq \sum_{e \in q} (c_e(f_e) + f_e c'_e(f_e)) \right).$$

Uwaga 85. f minimalizuje c , gdy jest równowagą Wardropa dla zmienionej funkcji kosztu krawędziowego $c_e^*(x) = c_e(x) + xc'_e(x)$.

Definicja 49. Przepływ dopuszczalny f , który minimalizuje c , nazywamy **równowagą (społeczną) Wardropa na grafie** (albo **przepływem optymalnym w sensie Wardropa**).

13 Wykład 13

Przykład 47 (Przykład Pigou). Mamy graf skierowany od s do t , z ładunkiem d , który składa się z 2 dróg: 1. o koszcie $c_{e_1}(x) = ax$, gdzie $a > 0$, a druga — $c_{e_2}(x) \equiv 1$. Mamy dwie możliwe równowagi: $f_1^*(p) = d \cdot [p = \{e_1\}]$, jeśli $a < \frac{1}{d}$, a w przeciwnym razie:

$$f_2^*(p) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{jeśli } p = \{e_1\} \\ d - \frac{1}{a} & \text{jeśli } p = \{e_2\} \end{cases}.$$

Rozważmy teraz zmienioną funkcję kosztu: $c_{e_1}^*(x) = c_{e_1}(x) + xc_{e_1}'(x) = ax + x \cdot a = 2ax$ oraz $c_{e_2}^*(x) = c_{e_2}(x) + xc_{e_2}'(x) = 1 + x \cdot 0 = 1$. W takiej grze równowaga Wardropa f_{opt} jest analogiczna, tyle, że ze stałą $a' = 2a$ zamiast a .

Uwaga 86. Zauważmy, że zarówno $\varphi_{e_1}(x) = \int_0^x c_{e_1}^*(\xi) d\xi = ax^2$, jak i $\varphi_{e_2}(x) = \int_0^x c_{e_2}^*(\xi) d\xi = x$, dla obu krawędzi, są funkcjami różniczkowalnymi, niemającymi i wypukłymi.

Uwaga 87. Chcieli byśmy rozważać jak bardzo może różnić się równowaga Wardropa względem rozwiązania optymalnego w danej grze.

Definicja 50. Ceną anarchii nazywamy $\max_{d \in (0, \infty)^T} \frac{c(f^*)}{c(f_{\text{opt}})}$, gdzie f^* jest równowagą Wardropa, a f_{opt} jest optimum w sensie Wardropa.

Uwaga 88. Należy pamiętać, że w powyższym wzorze funkcja c jest zależna zawsze od pierwotnych funkcji kosztów krawędzi c_e !

Przykład 48 (Pigou, c.d.). $c(f_1^*) = dad = ad^2$, gdy $a \leq \frac{1}{d}$, $c(f_2^*) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{a} + (d - \frac{1}{a}) \cdot 1 = d$ w przeciwnym przypadku oraz $c(f_{\text{opt}}) = dad = ad^2$, gdy $a \leq \frac{1}{2d}$, a w przeciwnym przypadku $c(f_{\text{opt}}) = \frac{1}{2a} \cdot a \cdot \frac{1}{2a} + (d - \frac{1}{2a}) \cdot 1 = \frac{1}{4a} + d - \frac{1}{2a} = d - \frac{1}{4a}$. Wobec tego cena anarchii to:

$$\max \left\{ \max_{d > \frac{1}{a}} \frac{d}{d - \frac{1}{4a}}, \max_{d \in [\frac{1}{2a}, \frac{1}{a}]} \frac{ad^2}{d - \frac{1}{4a}}, \max_{d < \frac{1}{2a}} \frac{ad^2}{ad^2} \right\} = \frac{4}{3}.$$

Twierdzenie 13.1 (Roughgarden). Górnym ograniczeniem na cenę anarchii w dowolnej grze na sieciach, gdzie wszystkie c_e są różniczkowalne, a $xc_e(x)$ są wypukłe, jest cena anarchii sieci złożonej z dwóch krawędzi od s do t , gdzie $\hat{c}_{e_1} = \text{const}$, a $\hat{c}_{e_2} = c_e$, dla pewnego e z sieci wyjściowej.

Szkic dowodu. Rozważmy dowolną grę na G z równowagą f . Rozważmy graf $G + G'$, gdzie G' jest kopią G , a suma grafów sumuje krawędzie między odpowiadającymi wierzchołkami. Innymi słowy, między każdymi dwoma wierzchołkami, gdzie była krawędź e , teraz są jej dwie kopie. Niech $c_{e'}(x) = c_e(f_e)$, gdzie e' jest kopią e . Zauważmy, że dla gry na sieci $G + G'$, f jest wciąż równowagą. Teraz $c_e^*(x) = c_e(x) + xc_e'(x)$ oraz $c_{e'}^*(x) = c_{e'}(x) + 0 = c_e(f_e)$. Jeśli f^* byłoby rozwiązaniem dopuszczalnym, które na każdej krawędzi e ma przesył $c_e(f_e)$, to ma takie przesyły jak równowaga Wardropa. Ale taką równowagę otrzymaliśmy dla f . Wobec tego f^* jest rozwiązaniem optymalnym na $G + G'$. Można pokazać, że cena anarchii dla $G + G'$ nie spadnie poniżej ceny anarchii dla G , a że ta pierwsza jest ograniczona przez $\max_{d, e \in E} \frac{f_e c_e(f_e)}{f_e^* c_e(f_e^*) + f_{e'} c_e(f_e)}$. Zatem cenę anarchii dla wyjściowej gry można ograniczyć przez cenę anarchii dla gry między dwoma wierzchołkami, między którymi jest krawędź maksymalizująca powyższe wyrażenie. $\square$

Uwaga 89. Dla gier z liniowymi wypłatami, cena anarchii jest ograniczona przez $\frac{4}{3}$.

Uwaga 90. Istnieje wersja gry na grafach, gdzie każdy typ utożsamiany jest z innym graczem. Jest to tak zwana gra atomowa. Dla tego typu gier znanych jest więcej faktów.

13.1 Mechanizm losowy

Definicja 51. Mechanizm losowy jest rozkładem na mechanizmach deterministycznych, które współdzielą graczy P , przestrzenie typów graczy B_i (możliwych stawek i -tego gracza) i przestrzeń możliwych rozstrzygnięć A .

13.2 Podejście bayesowskie

Definicja 52. Mechanizm nazywamy bayesowskim, jeśli jest krotką: (P, B, D, X, A, v, a, p) , gdzie:

1. P to zbiór graczy (będziemy zakładać, że $P = [n]$),
2. $B = \prod_{i=1}^n B_i$, gdzie B_i to przestrzeń typów (stawek),
3. $D = \prod_{i=1}^n D_i$, gdzie D_i to rozkład a priori na B_i (znane graczom $j \neq i$),
4. $X = \prod_{i=1}^n X_i$, gdzie X_i to zbiór możliwych akcji gracza i (znany wszystkim),
5. A to zbiór możliwych rozstrzygnięć,
6. $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, gdzie $v_i : B_i \times A \rightarrow \mathbb{R}$ to wartość rozstrzygnięcia dla gracza i ,
7. $a : X \rightarrow A$, to funkcja rozstrzygnięć w zależności od akcji wybranych przez graczy,
8. $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, gdzie $p_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, to koszty poszczególnych profili akcji dla i -tego gracza,
9. $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, gdzie $u_i : B_i \times X \rightarrow \mathbb{R}$, to funkcja wypłaty i -tego gracza, gdzie $u_i(t_i, x) = v_i(t_i, a(x)) - p_i(x)$.

Definicja 53. Strategią gracza i nazywamy $s_i : B_i \rightarrow X_i$, która danemu typowi przypisuje jego posunięcie.

Profil strategii $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ nazywamy równowagą Bayesa—Nasha, jeśli

$$(\forall i \in P)(\forall t_i \in B_i)(\forall x_i \in X_i) \mathbb{E}_{D_{-i}}[u_i(t_i, \langle s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}) \rangle)] \geq \mathbb{E}_{D_{-i}}[u_i(t_i, \langle x_i, s_{-i}(t_{-i}) \rangle)] .$$

Ponadto $f : B \rightarrow A$ nazywamy bayesowską funkcją wyboru społecznego, jeśli

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = a((s_1(t_1), s_2(t_2), \dots, s_n(t_n))) ,$$

dla pewnej równowagi s .