

Wprowadzenie do funkcji zespolonych

Rafał Kapelko

PWr, WIT, KPI,
Wrocław 1.10.2024

1 Liczby zespolone

1 — Na płaszczyźnie zespolonej narysuj zbiory określone podanymi warunkami

1. $0 \leq |1 - i - z| \leq 4$,
2. $|z - i| = |z - 1|$.

2 — Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz podane wyrażenia:

1. $(1 - \sqrt{3}i)^4$,
2. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$

3 — Udowodnij wzór na pierwiastki z liczby zespolonej.

4 — Rozwiąż podane równania:

1. $z^2 + iz + 2 = 0$,
2. $z^3 - 8 = 0$

2 Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

5 — Dla podanych funkcji wyznacz ich część rzeczywistą i urojoną:

1. $\frac{1}{z^2}$,
2. e^{iz}

6 — Dla jakich liczb zespolonych z funkcja e^z przyjmuje wartości rzeczywiste ujemne?

7 — Rozwiąż równania:

1. $e^z = e^{iz}$,
2. $e^z = e^{\Re z}$.

8 — Oblicz $\sin(1 + i)$, $\operatorname{Log}(2i)$, $\log(1 + i)$.

9 — Dowieść podanych tożsamości:

1. $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_1)\sin(z_2)$,

2. $\sin(z) = 0 \leftrightarrow z = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$.

10 — Rozwiąż równania:

1. $e^{2z} = 2i$,
2. $\cos(z) = -2i$.

11 — Oblicz granice podanych ciągów zespolonych $\frac{e^{in}}{n}$, $(-1)^n$, $(1+i)^n$.

12 — W jakich punktach płaszczyzny funkcja $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ przyjmuje wartości:

1. rzeczywiste,
2. urojone.

13 — Oblicz następujące granice:

1. $\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 - 2z + 1)$,
2. $\lim_{z \rightarrow \infty} z^m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$,
3. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z}$.

14 — Pokaż, że granica $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{z^2}$ nie istnieje.

15 — Zbadaj ciągłość następujących funkcji:

1. $f(z) = \bar{z}$,
2. $f(z) = \begin{cases} \frac{\Re(z)}{1+|z|} & \text{dla } z \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$
3. $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|} & \text{dla } z \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$

16 — Udowodnij, że funkcja $\log(z)$ jest funkcją ciągłą za wyjątkiem punktów leżących na ujemnej osi rzeczywistej.

...

c.d.n.