

Wykład Algorytmiczna Teoria Gier 2024/25

Dominik Bojko
KPI WIT Politechnika Wrocławska

29 stycznia 2025

Spis treści

1	Wykład 1	3
1.1	Elementarz topologii	3
1.2	Elementarz algebry liniowej oraz analizy wypukłej	4
1.3	Twierdzenia o punktach stałych	5
2	Wykład 2	7
2.1	Krótką historia teorii	7
2.2	Gry strategiczne	7
2.3	Dominacje, równowaga Nasha, optimum Pareta	8
3	Wykład 3	11
3.1	Eliminacja Strategii Zdominowanych	11
3.2	Koordinacja w grach	12
4	Wykład 4	13
4.1	Gry o sumie stałej	13
4.2	Gry minimaxowe, punkty siodłowe, punkty bezpieczeństwa	14
5	Wykład 5	17
5.1	Strategie zrandomizowane, mieszana równowaga Nasha	17
5.2	Twierdzenie Nasha	18
5.3	Metoda Williama	19
6	Wykład 6	21
6.1	Równowagi skorelowane	21
7	Wykład 6	23
7.1	Szukanie równowag Nasha w grach dwumacierzowych	23
8	Wykład 7	26
8.1	Gry w postaci ekstensywnej (rozwinętej)	26
9	Wykład 8	27
9.1	Podgry w postaci ekstensywnej; Równowaga doskonała	27
10	Wykład 9	28
10.1	Aukcje	28
11	Wykład 10	30
11.1	Algorytm alfa-beta	30
11.2	Gry koalicyjne	30

12 Wykład 11	33
12.1 Wartość Shapleya	33
12.2 Indeksy siły	34
13 Wykład 12	34
13.1 Twierdzenie Arrowa	34
13.2 Gry na sieciach	35
14 Wykład 13	37

1 Wykład 1

1.1 Elementarz topologii

Zakładam, że pojęcia przestrzeni metrycznej, metryki, kuli otwartej, normy (w szczególności euklidesowej) są znane.

Definicja 1. W przestrzeni metrycznej (X, d) , **średnicą zbioru** $A \subset X$, nazywamy $\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. A jest **zbiorem ograniczonym**, jeśli $\text{diam}(A) < \infty$.

Definicja 2. **Przestrzenią topologiczną** nazywamy parę $(X, \mathcal{O})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ jest rodziną zbiorów, która spełnia aksjomaty:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
2. $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$,
3. $\mathcal{T} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ nazywamy wtedy **topologią**, a jej elementy — **zbiorami otwartymi**. **Dopełnienia** (do X) zbiorów otwartych, nazywamy **zbiorami domkniętymi**.

Uwaga 1. Punkty 2. i 3., często wyraża się słowami: *topologia jest zamknięta na dowolne sumy (mnogościowe) i skończone przekroje*.

Uwaga 2. Każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną (wystarczy zadać topologię przez najmniejszy zbiór spełniający warunki 1.-3. i zawierający wszystkie kule otwarte w przestrzeni metrycznej).

Przykład 1. Niech $X = \mathbb{R}$ i $\mathcal{O}$ będzie najmniejszą topologią, która zawiera wszystkie odcinki postaci (a, b) , gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wtedy mówimy, że $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ jest przestrzenią topologiczną na prostej, ze standardową topologią.

Przykład 2. Podobnie, gdy $X = \mathbb{R}^k$ oraz $\mathcal{O}$ jest najmniejszą topologią, która zawiera wszystkie kule otwarte w normie ℓ_2 (tj. postaci $\{y \in \mathbb{R}^k : \|x - y\|_2 < r\}$, gdzie $x \in \mathbb{R}^k$ i $r \in \mathbb{R}_+$ mogą być dowolnie wybierane), to mówimy o standardowej (naturalnej) topologii w k -wymiarowej przestrzeni euklidesowej (z normą ℓ_2).

Uwaga 3. W probabilistyce ekstensywnie wykorzystuje się rodziny zbiorów borelowskich, które można zdefiniować jako najmniejsze σ -ciało (σ -algebrę) wygenerowaną przez topologię (tj. zawierającą ją). Najczęściej rozważa się standardową topologię.

Definicja 3. **Przestrzeń dyskretna** $(X, \mathcal{O})$ to taka, w której $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.

Definicja 4 (Ciągłość). W przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{O})$ mówimy, że **funkcja** f jest **ciągła**, jeśli dla dowolnego $U \in \mathcal{O}$, $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}$.

Uwaga 4. W przestrzeniach metrycznych powyższa definicja ciągłości jest równoważna z definicjami Heinego i Cauchy'ego (przy założeniu pewnej wersji Aksjomatu Wyboru).

Uwaga 5. W definicji można zamienić zbiory otwarte na domknięte, aby uzyskać kolejną postać równoważną.

Definicja 5 (Zupełność). Ciąg $(x_n)_n$ w przestrzeni metrycznej (X, d) , nazywamy **ciągłem Cauchy'ego** (albo **ciągłem podstawowym**), jeśli spełnia warunek:

$$((\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0)(\forall n, m > N_0) d(x_n, x_m) < \varepsilon) .$$

Mówimy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest **zupełna**, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Uwaga 6. Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego (Wsk. Wystarczy skorzystać z nier. trójkąta).

Twierdzenie 1.1 (Banach; o kontrakcji / o punkcie stałym). Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną, X oraz $f : X \rightarrow X$ będzie **kontrakcją** (**in. odwzorowaniem zwężającym**) ze stałą $\alpha \in (0, 1)$, tj.

$$(\forall x, y \in X) d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y) .$$

Wtedy f ma dokładnie jeden punkt stały x^* , tj. taki, że $f(x^*) = x^*$. Co więcej, jeśli $x_0 \in X$ jest dowolnym elementem przestrzeni X , to ciąg zdefiniowany jako $x_{n+1} = f(x_n)$, zbiega do x^* .

Uwaga 7. Można oszacować tempo zbieżności takiego ciągu w zależności od $d(x_0, x_1)$ i stałej α (prosty wniosek z dowodu, który nie będzie tu przedstawiony).

Definicja 6 (Zwartość). Pokrycie to taka rodzina zbiorów $\mathcal{U}$, której suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{U}$ daje całą przestrzeń. Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{O})$ nazywamy **zwartą**, jeśli z dowolnego pokrycia $\{U_t\}_{t \in T}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi, można wybrać podpokrycie $\{U_{t_i}\}_{i=1}^n$ skończone.

Fakt 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^k$, z naturalną topologią, zwartość podprzestrzeni jest równoważna z jej domkniętością i ograniczonością.

Fakt 2 (Charakterystyka ciągowa zwartości). W przestrzeniach metrycznych, zwartość zbioru K jest równoważna z tym, że dla każdego ciągu w K , istnieje podciąg zbieżny do pewnego punktu $x \in K$.

Uwaga 8. Dla zbioru zwartego K i dowolnego ciągu $(x_n)_n$ o wartościach w K , z istnienia skończonego pokrycia zbiorami otwartymi, dostajemy, że w jednym z tych zbiorów jest nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu.

Fakt 3. W przestrzeni metrycznej, każdy zbiór zwarty jest zupełny.

Twierdzenie 1.2 (Weierstrass; o osiąganiu kresów). Niech K będzie zbiorem zwartym. Każda funkcja ciągła $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga swoje kresy (maksima i minima).

Definicja 7 (Zbiór nigdziegęsty, zbiór I kategorii). W p. topologicznej $(X, \mathcal{O})$, $Y \subseteq X$ jest zbiorem **nigdziegęstym**, jeśli:

$$(\forall U \in \mathcal{O})(\exists O \in \mathcal{O}) O \subseteq U \wedge O \cap Y = \emptyset.$$

Mówimy, że $Y \subseteq X$ jest zbiorem **I kategorii Baire'a**, jeśli jest sumą mnogościową co najwyżej przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych.

Uwaga 9. Ostatnia definicja będzie przydatna w jednym z zadań na ćwiczenia.

1.2 Elementarz algebry liniowej oraz analizy wypukłej

Definicja 8. W przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, niech $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{V}$ i $\lambda_i \in K$, dla $i \in [n]$, będą takie, że $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, gdzie $(\forall i \in [n]) \lambda_i \in [0, 1]$. Mówimy wtedy, że punkt postaci $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \mathbb{V}$ jest **kombinacją wypukłą** punktów $(x_i)_{i=1}^n$ z wagami $(\lambda_i)_{i=1}^n$.

Definicja 9. Mówimy, że podzbiór przestrzeni liniowej $X \subset \mathbb{V}$ jest **wypukły**, jeśli kombinacja wypukła dwóch dowolnych punktów z X jest elementem X . W przeciwnym razie mówimy, że zbiór jest **wklęsły**.

Fakt 4. Zbiór wszystkich kombinacji wypukłych skończonej liczby punktów przestrzeni liniowej jest zbiorem wypukłym.

Definicja 10. Niech X będzie podzbiorem przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Mówimy, że **funkcja** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest **wypukła**, jeśli

$$(\forall x, y \in X)(\forall \lambda \in [0, 1]) ((\lambda x + (1 - \lambda)y) \in X) \Rightarrow ((\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) .$$

Uwaga 10. Jeśli powyższa nierówność zachodzi w drugą stronę, to taką **funkcję** nazywamy **wklęsłą**.

Uwaga 11. Jeśli funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, posiada f'' , to $(\forall x \in A) f''(x) \geq 0$ jest równoważne z jej wypukłością.

Uwaga 12. Jeśli funkcja f jest określona na zbiorze wypukłym i jest wypukła, to zbiór punktów leżących powyżej jej wykresu jest zbiorem wypukłym.

Uwaga 13. Poprzednik implikacji w definicji jest potrzebny, gdy X nie jest zbiorem wypukłym. W szczególności, definicja ta działa dla zbiorów dyskretnych.

Definicja 11. Mówimy, że zbiór wektorów $(x_i)_{i=0}^k$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jest **afinicznie niezależny względem** x_0 , jeśli $(x_i - x_0)_{i=1}^k$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{V}$.

Definicja 12. Sympleksem k -wymiarowym nazywamy najmniejszy możliwy podzbiór przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ taki, że zawiera wszystkie możliwe kombinacje wypukłe pewnych elementów $(x_i)_{i=0}^k \subseteq \mathbb{V}$, afinicznie niezależnych wzgl. x_0 . Elementy te nazywamy **wierzchołkami sympleksu**.

Uwaga 14. Jeśli S jest sympleksem o wierzchołkach $X := (x_i)_{i=0}^k$, to każdy sympleks, którego wierzchołkami jest właściwy podzbiór X , nazywa się **ścianą** sympleksu S . W szczególności, wierzchołki są ścianami, ale cały sympleks już nie.

Definicja 13. Zbiór sympleksów $(S_t)_{t \in T}$ nazywa się **podziałem symplecjajalnym** sympleksu S , jeśli:

•

$$\bigcup_{t \in T} S_t = S,$$

•

$$(\forall t_1, t_2 \in T) (t_1 \neq t_2) \Rightarrow (S_{t_1} \cap S_{t_2} = \emptyset \vee S_{t_1} \cap S_{t_2} \text{ jest wspólną ścianą } S_{t_1} \text{ i } S_{t_2}).$$

1.3 Twierdzenia o punktach stałych

Twierdzenie 1.3 (Brouwera; o punkcie stałym). Jeśli S jest sympleksem, a $f : S \rightarrow S$ jest odwzorowaniem ciągłym, to f ma punkt stały.

Uwaga 15. Punkt stały nie musi być wyznaczony jednoznacznie.

Uwaga 16. Twierdzenie to ma wiele dowodów. Jeden z najprostszych można znaleźć w książce: K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii, PWN, 1962.

Opiera się na twierdzeniach Spernera (kombinatorycznym) oraz Knastera—Kuratowskiego—Mazurkiewicza (teorio-mnogościowym).

Uwaga 17. Twierdzenie Brouwera pozostaje prawdziwe, jeśli zamienimy w nim sympleks na zbiór zwarty i wypukły.

Definicja 14. Mówimy, że $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ma własność **wykresu domkniętego**, jeśli dla ciągu $(x_i)_{i=1}^\infty$, zbieżnego do x^* oraz $(y_i)_{i=1}^\infty$, zbieżnego do y^* , spełnienie warunku: $(\forall i \in \mathbb{N}) y_i \in f(x_i)$, pociąga za sobą, że $y^* \in f(x^*)$.

Twierdzenie 1.4 (Kakutaniego; o punkcie stałym). Niech S będzie sympleksem k -wymiarowym, a $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ będzie miał własność wykresu domkniętego oraz spełnia warunek: $(\forall s \in S)$, $f(s)$ jest zwarty i wypukły. Istnieje wtedy $x^* \in S$, że $x^* \in f(x^*)$.

Dowód. Niech $S^{(n)} := \{S_t^{(n)}\}_{t \in T_n}$ będzie ciągiem (indeksowanym $n \in \mathbb{N}$) podziałów symplecjajalnych wyjściowego sympleksu S , że

$$\delta_n := \sup\{\text{diam}(S_t^{(n)}) : t \in T_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+.$$

Zdefiniujemy funkcje pomocnicze $f^{(n)} : S \rightarrow S$ następująco (dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z osobna):

1. Dla każdego $x \in S$, który jest wierzchołkiem któregoś z sympleksów z $S_t^{(n)}$, kładziemy $f^{(n)}(x) = s$, gdzie s jest dowolnie wybrane ze zbioru $f(x)$.
2. Jeśli x leży dokładnie w jednym $S_t^{(n)}$, to istnieje dokładnie jeden zestaw wag $(\lambda_i^{(n,t)})_{i=0}^k \in [0, 1]^{k+1}$, że wybrany $x \in S$ jest kombinacją wypukłą wierzchołków $(x_i^{(n,t)})_{i=0}^k$ (sympleksu $S_t^{(n)}$) z tymi wagami. Wtedy kładziemy

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(n,t)} f^{(n)}(x_i^{(n,t)}). \quad (1)$$

3. Jeśli x leży na wspólnych ścianach sympleksów, to funkcje również definiujemy wzorem (1) dla dowolnie wybranego sympleksu $S_t^{(n)}$, który zawiera tę ścianę, gdyż wagi wierzchołków niestowarzyszonych ze wspólną ścianą różnych sympleksów będą zawsze równe 0. Zatem taka definicja jest w ten sposób jednoznaczna (zwraca zawsze tę samą wartość liczbową).

Każde z odwzorowań $f^{(n)} : S \rightarrow S$ jest liniowe na każdym z $S_t^{(n)}$, więc z definicji podziału symplecjajalnego, będzie to odwzorowanie ciągłe. Wobec tego, z tw. Brouwera, każde z odwzorowań $f^{(n)} : S \rightarrow S$ ma swój punkt stały, tj. istnieją dla każdego $n \in \mathbb{N}$, elementy $x^{*n} \in S$, że $f^{(n)}(x^{*n}) = x^{*n}$. Zauważmy, że wtedy, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje $t_n \in T_n$, że punkty

stałe możemy wyrazić jako kombinacje wypukłe wierzchołków t_n : $(x_i^{*n})_{i=0}^k$, tj. w postaci: $x^{*n} = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{*n} x_i^{*n}$. Będziemy

rozważać dalej ciągi: $(x_i^{*n})_n$, $(\lambda_i^{*n})_n$ i $(f^{(n)}(x_i^{*n}))_n$ (gdzie $i \in [0 : k]$). Ze zwartości S i $[0, 1]$ otrzymujemy, że ciągi te mają podciągi zbieżne. Skoro jest ich skończona ilość, to możemy bez utraty ogólności założyć, że te ciągi są zbieżne (precyzyjniej, należałoby zbudować podciągi podciągów podciągów itd. i pracować tylko na takich mocno okrojonych ciągach; oczywiście

wtedy wystarczy je przeindeksować tak, żeby odpowiadały kolejnym liczbom naturalnym). Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, z założeń dla ciągu podziałów sympleksyjnych, mamy $d(x_i^{*n}, x^{*n}) \leq \delta_n \rightarrow 0$. Wobec tego, dla wszystkich $i \in [0 : k]$, ciągi $(x_i^{*n})_n$ oraz $(x^{*n})_n$ zbiegają do tej samej granicy x^* , gdy $n \rightarrow \infty$. Niech ponadto dla $i \in [0 : k]$, $\lambda_i^{*n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_i^*$ oraz $f^{(n)}(x_i^{*n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_i^*$. Naturalnie, korzystając z własności punktu stałego, możemy przedstawić interesujące nas punkty stałe jako następujące kombinacje wypukłe: $x^{*n} = f^{(n)}(x^{*n}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{*n} f^{(n)}(x_i^{*n})$. Dla wszystkich $i \in [0 : k]$ i $n \in \mathbb{N}$, z definicji $f^{(n)}$, mamy $f^{(n)}(x_i^{*n}) \in f(x_i^{*n})$, gdyż x_i^{*n} są wierzchołkami sympleksów z podziałów $\mathcal{S}^{(n)}$. Co więcej, $x_i^{*n} \rightarrow x^*$ i $f^{(n)}(x_i^{*n}) \rightarrow \xi_i^*$, więc korzystając z domkniętości wykresu, mamy dla wszystkich $i \in [0 : k]$, $\xi_i^* \in f(x^*)$. Z twierdzenia o arytmetyce granic, $x^* = \sum_{i=0}^k \lambda_i^* \xi_i^*$, ale $f(x^*)$ jest zbiorem wypukłym, więc jest zamknięty na kombinacje wypukłe. Wobec tego także $x^* \in f(x^*)$. □

Uwaga 18. Powyższe tw. pozostaje prawdziwe, gdy zamienimy w sformułowaniu sympleks S na zbiór zwarty i wypukły.

Uwaga 19. Twierdzenia o punktach stałych będą używane w dalszych częściach wykładu.

2 Wykład 2

2.1 Krótka historia teorii

Teoria gier „wykiełkowała” z teoretycznych rozważań w szeroko rozumianej ekonomii (np. rozważania Vilfredo Pareta z przełomu XIX i XX w.w.

John von Neumann, wraz z Oscarem Morgensternem stworzyli podwaliny teorii gier (m.in. twierdzenie min-max-owe). W latach ‘50 napisali książkę pt. „Theory of Games and Economic Behavior”, która była swego rodzaju podręcznikiem teorii gier, teorii wypłat i mikroekonomii. Koncept algorytmicznej teorii gier pojawił się mniej więcej w latach ‘50.

7 lat po „The Theory of Games and Economic Behavior”, pojawiła się praca Johna Nasha Jr., która rzuciła nowe światło na tę dziedzinę. Wprowadził do niej tzw. pojęcie równowagi Nasha. Liczne zastosowania tej pracy w inżynierii finansowej, w konsekwencji dały w 1994r. Nashowi nagrodę Nobla z ekonomii.

Jest to jeden z wielu Noblistów, zasłużonych w tej teorii.

Postaramy się poruszyć główne wątki Teorii Gier, przede wszystkim pod kątem zastosowań algorytmicznych, ale też w innych dziedzinach.

2.2 Gry strategiczne

Do zdefiniowania gry w klasycznym ujęciu potrzeba kilku elementów: graczy, ich wiedzy (informacji), akcji podejmowanych przez tych graczy na podstawie swojej wiedzy oraz wypłat, które są wynikiem akcji podjętych przez graczy. Niektóre, bardziej złożone gry, wymagają pewnych dodatkowych elementów.

Najprostsza, klasyczna wersja gry przeznaczona jest dla skończonej liczby graczy, którzy podejmują jednocześnie po 1 akcji:

Definicja 15 (Gra w postaci normalnej). • Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem n graczy.

- Każdy z graczy p_i , $i \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}$, ma swój zwarty zbiór **strategii (czystych)** S_i .
- W każdej realizacji gry, każdy z graczy p_i wybiera swoją strategię $s_i \in S_i$, tworząc w ten sposób wektor strategii $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Wobec tego, określamy $S = \prod_{i=1}^n S_i$ jako zbiór możliwych **profilu strategii** (wektorów strategii).
- Każdy profil strategii $s \in S$ jednoznacznie wyznacza wektor **wypłat** (ang. payoff/utilities) $u(s) = (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s))$ ($u : S \rightarrow V^n$, gdzie V jest p. lin.), czyli zysków (bądź strat w przypadku ujemnych wartości) poszczególnych graczy (gdzie p_i zyskuje $u_i(s)$). Każda z u_i jest nazywana **funkcją wypłat** dla gracza p_i .
Trójkę uporządkowaną (P, S, u) nazywamy **grą w postaci normalnej (strategicznej)**.

Definicja 16 (Gra skończona). Jeśli $|S| < \aleph_0$, to mówimy, że gra jest **skończona**.

Uwaga 20. Zazwyczaj przyjmuje się, że $V = \mathbb{R}$, czyli $\text{img}(u_i) \subseteq \mathbb{R}$.

Uwaga 21. Czasem używa się terminów wektora i funkcji kosztu w kontekście $-u$. W statystycznej teorii gier mówi się o wektorze oraz funkcji strat (ang. loss function).

Definicja 17. Jeśli dla każdego gracza $p_i \in P$, u_i zależy tylko od s_i , to mówimy, że strategie czyste są **niezależne** od profili strategii.

Uwaga 22. W kontekście gier planszowych, w takiej sytuacji mówi się o braku interakcji między graczami.

Uwaga 23. Gracze mogą mieć wpływ na wypłaty innych graczy.

Uwaga 24. Grę na mniej niż 2 graczy (tj. $|P| < 2$) będziemy nazywali **trywialną**.

Definicja 18 (Preferencyjne porządki graczy dla profili strategii). Dla każdego gracza p_i , definiujemy preferencyjny porządek $\geq_i \in S^2$, który jest liniowym porządkiem (tj. jest słabo-antysymetryczny, przechodni, zwrotny i liniowy) i określa, zależności między możliwymi profilami strategii z punktu widzenia każdego z graczy, tj.

$$(s \geq_i s') \Rightarrow u_i(s) \geq u_i(s').$$

Jeśli $s \geq_i s'$, to mówimy, że p_i preferuje s nad s' .

Uwaga 25. Jeśli $u_i(s) = u_i(s')$, dla $s \neq s'$, to $\geq_i$ nie jest wyznaczony jednoznacznie (istnieją różne poprawne preferencyjne porządki).

$s_M \backslash s_J$	1	2	3
1	50	-101	-151
2	100	50	-151
3	-151	-151	50

Rysunek 1: Zysk Małgosi i Jasia $u_M \backslash u_J$, przedstawiony w postaci macierzowej.

Przykład 3 (Jaś i Małgosia). *Jaś i Małgosia są w chatce z piernika i mają dowolną liczbę paczek cukierków, po 50 sztuk każda. Każdy cukierek, który zjedzą bez zwymiotowania, działa na nich pozytywnie. W przeciwnym razie czas wymiotowania jest zależna od liczby zjedzonych cukierków. Strategie czyste dzieci to liczby zjedzonych paczek cukierków.*

Strategie czyste Jasia i Małgosi są niezależne, więc łatwo wybrać „najlepsze” strategie czyste dla obojga z nich.

Uwaga 26. Na Rys. 3 przedstawiono aranżację w reprezentacji (dwu-)macierzowej gry 2-osobowej w postaci normalnej.

Przykład 4 (Duża gra kolektywna). *Populacja Rebeliostanu to $|P| = 40\,000\,000$. Każdy Rebelion może się zbuntować albo nie, tj. $(\forall p_i \in P) S_i = \{Revolt, Peace\}$. Jeśli Rebelion się zbuntuje w grupie co najmniej miliona rebeliantów, to bunt się uda, a w przeciwnym razie wyciągane są wobec niego konsekwencje, co można opisać poniższym wzorem:*

$$u_i = \begin{cases} 1 & |\{p_j : s_j = Revolt\}| \geq 1\,000\,000 \wedge s_i = Revolt, \\ -1 & |\{p_j : s_j = Revolt\}| < 1\,000\,000 \wedge s_i = Revolt, \\ 0 & s_i = Peace. \end{cases}$$

Uwaga 27. W grach kolektywnych zazwyczaj mamy do czynienia z dużą liczbą graczy o takich samych zbiorach strategii i zgeneralizowanych wypłatach (np. symetrycznych, jak w powyższym przykładzie, albo antysymetrycznych ze względu na część graczy).

2.3 Dominacje, równowaga Nasha, optimum Pareta

Definicja 19. Niech $P = [n]$. Dla profilu strategii $s \in S$, określamy $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, \dots, s_{i+1}, \dots, s_n)$, jako **dopełniający profil strategii do i -tego gracza**, czyli profil strategii s , z pominięciem strategii czystej i -tego gracza. Będziemy wtedy zapisywać skrótowo $s = \langle s_i, s_{-i} \rangle$. Zbiór wszystkich dopełniających profili strategii do i -tego gracza oznaczamy przez S_{-i} .

Definicja 20 (Dominacje, czysta równowaga Nasha i optimum Pareta). Niech $P = [n]$. Mówimy, że strategia czysta s_i^* :

- **słabo dominuje** s'_i , jeśli

$$(\forall s_{-i} \in S_{-i}) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) \geq u_i(\langle s'_i, s_{-i} \rangle).$$

- **ściśle dominuje** s'_i , jeśli

$$(\forall s_{-i} \in S_{-i}) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) > u_i(\langle s'_i, s_{-i} \rangle).$$

- **jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i} (lub strategią najlepszą dla i)**, jeśli

$$(\forall s_i \in S_i) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) \geq u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle).$$

Mówimy, że profil strategii $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) \in S$:

- **jest strategią (słabo) dominującą (lub rozwiązaniem (słabo) dominującym)**, jeśli:

$$(\forall i \in [n])(\forall s \in S) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) \geq u_i(s).$$

- **jest strategią ściśle dominującą (lub rozwiązaniem (ściśle) dominującym)**, jeśli:

$$(\forall i \in [n])(\forall s \in S, s_i \neq s_i^*) u_i(\langle s_i^*, s_{-i} \rangle) > u_i(s).$$

- jest **równowagą Nasha w strategiach czystych** (ang. *Pure Nash Equilibrium; PNE*), jeśli $(\forall i \in [n]) (s_i^* \text{ jest najlepszą odpowiedzią na } s_{-i}^*)$.
- jest **optimum w sensie Pareta**, jeśli

$$(\forall s \in S \setminus \{s^*\}) \{ [(\exists j \in [n]) u_j(s) < u_j(s^*)] \vee [u(s) = u(s^*)] \}.$$

Zbiór wszystkich optimum w sensie Pareta jest nazywanych często **frontem Pareta**.

Uwaga 28. Jeśli strategia czysta s_i^* dominuje s'_i , to zmiana strategii czystej z s_i^* na s'_i , nie poprawi wypłaty gracza i (w przypadku ścisłej dominacji, nawet pogorszy).

Uwaga 29. Jeśli strategia czysta gracza i jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i} , to zmiana strategii nie zwiększy wypłaty tego gracza, jeśli reszta graczy zagra dopełniający profil strategii s_{-i} .

Uwaga 30. Profil strategii jest dominujący, jeśli odpowiadające strategię każdego z graczy są najlepszymi odpowiedziami na każdy dopełniający profil strategii.

Uwaga 31. Czysta równowaga Nasha oznacza, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmieniać strategii, bo na tym nie zyska, a być może jeszcze inny gracz straci.

Uwaga 32. Optimum Pareta oznacza, że jakakolwiek zmiana profilu strategii nie jest w stanie zwiększyć wypłaty żadnego z graczy bez obniżenia co najmniej jednej z wypłat innych graczy.

Przykład 5 (Wojna płci (ang. Battle of sexes)). Para umówiła się na sobotnie wydarzenie na lodowisku, ale oboje nie byli początkowo świadomi o tym, że o tej samej godzinie są dwa różne wydarzenia w dwóch różnych miejscach. Nie chcą jednak się dopytywać, żeby nie wyszło na jaw, że mogli myśleć o różnych wydarzeniach. Dlatego każde z nich wybiera jedno „w ciemno”. Oczywiście kobieta woli oglądać mecz Hokeja, a mężczyzna — Rewię na lodzie. Ale oboje chcą spędzić dzień razem. Poniżej przedstawiono macierz wypłat:

		s^M	
		H	R
s^K	H	5, 2	1, 1
	R	-2, -2	2, 5

Rysunek 2: Postać macierzowa przykładu gry Battle of sexes

Najlepszą odpowiedzią na $s_M = R$ jest $s_K = R$ (i vice versa), a najlepszą odpowiedzią na $s_K = H$ jest strategia czysta $s_M = H$ (i vice versa). W tej grze nie ma strategii czystych dominujących, ani profili strategii dominujących. (R, R) i (H, H) są dwoma profilami strategii, które są jednocześnie równowagami Nasha, jak i tworzą front Pareta.

Przykład 6. Każdy z 2 trenerów wystawia jednego z 3 Pokémonów. Jeśli wystawią tego samego, to oba przegrywają jednocześnie. W przeciwnym razie wygrywa dominujący nad drugim.

1. *Bulbasaur* — trawa, 4. *Charmander* — ogień, 7. *Squirtle* — woda,

		s_2		
		B	C	S
s_1	B	-1, -1	1, -1	-1, 1
	C	1, -1	-1, -1	-1, 1
	S	-1, 1	1, -1	-1, -1

Rysunek 3: Macierz wygranych trenerów Pokémon

Uwaga 33. W tej grze nie ma czystych równowag Nasha, ale istnieje 6 optimum Pareta!

Fakt 5 (Zadanie). Dla każdego gracza w grze strategicznej, słaba dominacja w sensie strategii czystych jest relacją praporzędku (zwrotna i przechodnia), ale nie jest częściowym porządkiem (brak słabej antysymetrii). Przy pomocy praporzędku można wprowadzić relację równoważności i częściowy porządek na klasach abstrakcji strategii czystych względem tej relacji równoważności.

Definicja 21. Będziemy pisać $s_i \supseteq_i s'_i$, jeśli s_i słabo dominuje s'_i i odpowiednio $[s_i] \supseteq_i [s'_i]$, gdzie $\supseteq_i$ jest wspomnianym częściowym porządkiem na klasach abstrakcji.

Fakt 6. Profil $s \in S$ jest rozwiązaniem ścisłym wtedy i tylko wtedy, $(\forall p_i \in P) [s_i]$ jest $\supseteq_i$ -najmniejszy (s_i (ściśle) dominuje wszystkie inne (tj. o nieidentycznych wypłatach) strategie tego gracza).

Uwaga 34. Podobny fakt nie zachodzi dla słabych rozwiązań. W szczególności żadne z s_i może nie być $\supseteq_i$ -najmniejsze.

3 Wykład 3

3.1 Eliminacja Strategii Zdominowanych

Fakt 7. Jeśli $s \in S$ jest rozwiązaniem słabym, to dla każdego gracza $i \in [n]$, s_i jest najlepszą odpowiedzią na każdy możliwy profil strategii innych graczy s'_{-i} . W szczególności jest równowagą Nasha dla strategii czystych.

Innymi słowy: Każde słabe rozwiązanie jest równowagą Nasha.

Fakt 8. Każda gra skończona w postaci normalnej ma co najmniej jedno Optimum Pareta.

Uwaga 35. Jeśli rozważny gracz i posiada strategię $s_i, s'_i \in S_i$ takie, że $s'_i \supset_d s_i$, to powinien rozważać jedynie zbiór $S_i \setminus \{s_i\}$, bo s_i nie będzie zawarte ani w równowadze Nasha, ani rozwiązaniu ścisłym, ani w optimum Pareta.

Fakt 9 (Algorytm Eliminacji Strategii Czystych Zdominowanych (AESCZ)). Jeśli istnieją strategie czyste ściśle zdominowane, usuwaj je, dopóki się da (w arbitralnej kolejności). W wyniku takiego algorytmu otrzymamy uproszczoną grę. Jeśli wyjściowa gra posiadała ściśle rozwiązanie s^* , to algorytm wyeliminuje wszystkie profile strategii poza s^* . Algorytm ten jednak może usunąć wszystkie Optima Pareta.

Dowód. Jeśli $s \in S$ jest ściśle dominujące, to wszystkie $[s_i] = \{s_i\}$ są $\geq_i$ -najmniejsze. □

Fakt 10 (Słaba wersja AESCZ). Zastosuj AESCZ. Następnie, jeśli dla uproszczonej gry istnieją strategie czyste słabo zdominowane, usuwaj je, dopóki się da (w arbitralnej kolejności). Jeśli wyjściowa gra zawiera strategie słabo dominujące, to w wyniku słabej wersji AESCZ, pozostanie co najmniej jedna z nich.

Przykład 7 (Mecz piłki nożnej vs Romantyczny film).

Rozważmy grę, w której Kobieta i Mężczyzna wybierają co robią wieczorem: oglądają Mecz piłki nożnej albo Romantyczny film. Poniższa macierz przedstawia wypłaty dla tej gry.

$s_M \backslash s_K$	M	R
M	5, -2	1, 1
R	1, 1	-2, 5

Można usunąć $s_K = R$, a potem $s_M = M$, otrzymując strategię (M, R) albo najpierw $s_M = M$, a potem $s_K = R$, otrzymując tę samą strategię (M, R) . Jest to rozwiązanie ścisłe, wobec czego, też jest PNE.

Przykład 8.

$s_2 \backslash s_1$	A	B	C
X	5, -2	3, 1	2, 1
Y	5, 1	3, -2	0, -2

W tej grze nie ma strategii czystych ściśle dominujących. Można usunąć najpierw $s_2 = C$, równoważną (w sensie $\supseteq_2$) z $s_2 = B$, otrzymując grę, w której można albo usunąć równoważne (w sensie $\supseteq_1$) $s_1 = X$ albo $s_1 = Y$, co prowadzi odpowiednio do profilów strategii (Y, A) albo (X, B) . Jeśli najpierw usuniemy $s_1 = Y$, to potem można usunąć $s_2 = A$, doprowadzając do dwóch opcji: (X, B) i (X, C) . Wobec tego usuwanie słabo dominujących rozwiązań może prowadzić do różnych uproszczonych gier.

Zauważmy, że $X \supseteq_1 Y$, $B \supseteq_2 C$ i $C \supseteq_2 B$ określają wyjściowe praporzędki, lecz usunięcie strategii czystej C , bądź Y , modyfikuje praporzędki drugiego z graczy, dając możliwości różnych częściowych porządków, a co za tym idzie, różnych rozwiązań.

Przykład 9 (Paradoks więźnia (The prisoner's dilemma)).

Więźniowie mogą albo Milczeć albo „Sypać”. Wspólnie złamali prawo.

Niech $c > a > d > b$. Zazwyczaj zakłada się, że $b \geq 0$.

W tej grze jedyna równowaga Nasha (S, S) jest różna od wszystkich optimumów Pareta (tj. (M, M) , (M, S) i (S, M))!

		s_2	
		M	S
s_1	M	a a	c b
	S	b c	d d

Rysunek 4: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

3.2 Koordynacja w grach

Definicja 22. Gra koordynacyjna to gra (tłumna), w której każdy gracz ma identyczny zbiór strategii czystych oraz wypłata gracza $p \in P$ jest niemalejącą funkcją ze względu na rosnącą liczbę graczy, która wybierze tę samą strategię czystą.

W grze antykoordynacyjnej mamy, dla odmiany, do czynienia z nierosnącymi funkcjami.

W grze dyskoordynacyjnej dla dwóch osób, jeden z graczy dąży do koordynacji, a drugi do antykoordynacji strategii czystych.

Uwaga 36. Nie mylić gry koordynacyjnej z grą kooperacyjną!

Przykład 10. (Matching pennies 1)

Gracze wygrywają, jeśli wybiorą tę samą stronę monety. Jest to gra koordynacyjna.

		s_2	
		O	R
s_1	O	1 1	-1 -1
	R	-1 -1	1 1

Rysunek 5: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

Uwaga 37. Przykładem takiej gry koordynacyjnej jest też Battle of sexes z poprz. wykładu.

Przykład 11. (Matching pennies 2)

Gracz 1. wygrywa, jeśli oboje mają tę samą stronę monety, a drugi — w przeciwnym przypadku. Jest to gra dyskoordynacyjna.

		s_2	
		O	R
s_1	O	-1 1	1 -1
	R	1 -1	-1 1

Rysunek 6: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

Uwaga 38. Przykładem gry antykoordynacyjnej może być przypadek pojedynku dwóch trenerów Pokémon, z poprz. wykładu. Tam, funkcja wypłaty nie jest ściśle malejąca!

Przykład 12. (Matching pennies 3)

Gracze wygrywają, jeśli mają różne strony monet i przegrywają w przeciwnym przypadku. Jest to gra antykoordynacyjna.

$s_1 \backslash s_2$		O	R
		O	R
O		-1	1
R		1	-1

Rysunek 7: Funkcje wypłat $u_1 \backslash u_2$.

4 Wykład 4

4.1 Gry o sumie stałej

Definicja 23 (Gra o sumie zerowej, gra o sumie stałej). *Jeśli gra G spełnia warunek:*

$$(\forall s \in S) \sum_{i \in [n]} u_i(s) = 0 \quad \left(\sum u \equiv 0 \right),$$

*to taką grę nazywamy **grą o sumie zerowej**. Jeśli K jest ciałem skalarów nad V , to gra G , która spełnia warunek:*

$$(\exists c \in K)(\forall s \in S) \sum_{i \in [n]} u_i(s) = c,$$

*nazywamy **grą o sumie stałej**.*

Uwaga 39. *Każda gra o sumie zerowej jest grą o sumie stałej.*

Definicja 24. *Dane są dwie gry $G = ([n], S, u)$, $H = ([n], S', u')$ w postaci normalnej. Niech $\varphi : [n] \rightarrow [n]$ oraz dla każdego $p \in [n]$, $\psi_p : S_p \rightarrow S'_{\varphi(p)}$, będą bijekcjami. Zdefiniujmy $\psi : S \rightarrow S'$ następująco:*

$$\psi((s_i)_{i=1}^n) = (\psi_{\varphi^{-1}[j]}(s_{\varphi^{-1}[j]}))_{j=1}^n.$$

Niech $P_O(G, p)$ i $P_O(H, p)$ oznaczają zbiory wszystkich możliwych preferencyjnych porządków dla p -tego gracza, zgodnych odpowiednio z u w G i u' w H . Jeśli istnieją bijekcje $\xi_p : P_O(G, p) \rightarrow P_O(H, \varphi(p))$, dla $p \in [n]$ takie, że:

$$(\forall p \in [n])(\forall \succsim_p^{(G)} \in P_O(G, p)) [s^* \succsim_p^{(G)} s] \Leftrightarrow [\psi(s^*) \xi_p(\succsim_p^{(G)}) \psi(s)],$$

to mówimy, że G i H są równoważne.

Uwaga 40. *Równoważność gier jest relacją równoważności.*

G:	s_2	A	B
	s_1		
	X	1	-2
		0	2
	Y	-1	1

H:	s_2	X	Y
	s_1		
	A	1	0
		2	-1
	B	-2	1

I:	s_2	Y	X
	s_1		
	A	-1	0
		0	1
	B	-1	2

J:	s_2	N	⊃
	s_1		
	O	1	2
		2	3
	R	3	4

K:	s_2	N	⊃
	s_1		
	O	1	2
		1	3
	R	3	4

Rysunek 8: Funkcje wypłat $u_1 \setminus u_2$ w grach G, H, I, J oraz K.

Przykład 13 (Ciąg równoważnych gier). Mamy preferencyjne porządkki:

$$(A, X) \geq_1^{(I)} (A, Y) \geq_1^{(I)} (B, Y) \geq_1^{(I)} (B, X)$$

$$(X, B) \geq_2^{(I)} (Y, B) \geq_2^{(I)} (X, A) \geq_2^{(I)} (Y, A)$$

$$(O, \sqsupset) \geq_1^{(J)} (O, \aleph) \geq_1^{(J)} (R, \aleph) \geq_1^{(J)} (R, \sqsupset)$$

$$(R, \sqsupset) \geq_2^{(J)} (R, \aleph) \geq_2^{(J)} (O, \sqsupset) \geq_2^{(J)} (O, \aleph)$$

Gry G i J są równoważne, ale nie G i K.

Uwaga 41. Intuicyjnie: Gry są równoważne, jeśli można dopasować graczy i ich strategie tak, żeby po przeskalowaniu wypłat otrzymać te same gry.

Inaczej: Gry są równoważne, jeśli istnieją takie bijekcje graczy i ich strategii, żeby wszystkie możliwe preferencyjne porządkki w jednej grze, zachowywały porządek w drugiej grze, po przejściu przez bijekcje.

Twierdzenie 4.1 (von Neumann, Morgenstern, 1944; zadanie). Każda gra o sumie niezerowej na n graczy jest równoważna z grą o sumie zerowej dla $n + 1$ graczy.

Uwaga 42. Należy dodać odpowiednio 1 gracza do gry n -osobowej.

Fakt 11. W grze o sumie stałej, każda strategia jest Pareto-optymalna.

4.2 Gry minimaxowe, punkty siodłowe, punkty bezpieczeństwa

Definicja 25. Rozważmy grę dwuosobową o sumie stałej c , w której S_1, S_2 są zwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^k$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$). Wartością dolną gry $\underline{v}$ nazywamy $\sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$. Wartością górną gry $\bar{v}$ nazywamy $\inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2)$.

Jeśli $\underline{v} = \bar{v}$, to mówimy, że gra ma **wartość** v . Profil strategii, który realizuje wartość gry, nazywamy **punktem siodłowym**. Profil strategii (s_1, s_2) taki, że s_1 realizuje wartość dolną, a s_2 -wartość górną gry, nazywamy **strategią minimaxową (maksiminową)**.

Uwaga 43. W grach wieloosobowych o sumie stałej c , można zdefiniować wartość dolną dla gracza i jako

$$\underline{v}_i := \sup_{s_i \in S_i} \inf_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle). \text{ Można zdefiniować punkt siodłowy w takiej grze, jeśli } \sum_{i=1}^n \underline{v}_i = c.$$

Przykład 14 (Dumokrati vs Rekonsideranie). Politycy dwóch partii debatują na temat bardzo ważnej kwestii (choć nikt nie pamięta jakiej).

P - Poparcie ważnej sprawy, O - Opozycyjne nastawienie wobec sprawy, N - Neutralne nastawienie.

Zarówno wartość dolna, jak i górna wynoszą 30.

Profil strategii (N, O) jest strategią minimaxową, czyli punktem siodłowym. Jest też również jedyną równowagą Nasha.

Przykład 15 (Settlers). Kartagińczycy planują napad 2 oddziałami na Rzymian, którzy muszą rozlokować 3 swoje oddziały do 2 ufortyfikowań: w okolicy Pizy oraz w okolicy Syrakuz. Strategie opisujemy przez wektory liczby oddziałów odpowiednio w północnej Italii i na Sycylii. Prawdopodobieństwo sukcesu ataku na daną część Cesarstwa Rzymskiego to proporcja liczby oddziałów atakujących do wszystkich obecnych oddziałów, jeśli broniący nie mają przewagi liczebnej albo 0, jeśli mają. Wypłata to oczekiwana liczba przejętych/ obronionych ufortyfikowań.

Wartość dolna gry to 0.5, a górna to $\frac{2}{3}$. Strategie minimaxowe to $((1, 1), (1, 2))$ i $((1, 1), (2, 1))$. Gra ta nie ma czystych równowag Nasha.

$s_D \backslash s_R$	P	O	N	min
P	40 / 60	80 / 20	30 / 70	20
O	20 / 80	75 / 25	25 / 75	25
N	65 / 35	70 / 30	60 / 40	30
max	80	30	70	30

Rysunek 9: Poparcie dla partii w % w zależności od wybranego zdania w bardzo ważnej kwestii.

$s_K \backslash s_R$	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)	min
(2,0)	2 / 0	1.5 / 0.5	$\frac{4}{3}$ / $\frac{2}{3}$	1 / 1	0
(1,1)	1 / 1	1.5 / 0.5	1.5 / 0.5	1 / 1	0.5
(0,2)	1 / 1	$\frac{4}{3}$ / $\frac{2}{3}$	1.5 / 0.5	2 / 0	0
max	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$ / 0.5

Rysunek 10: Oczekiwana liczba posiadanych fortów po ataku.

Twierdzenie 4.2 (von Neumann, 1928). *Dla gry dwuosobowej o sumie stałej:*

1. $\underline{v} \leq \bar{v}$,
2. Jeśli gra ma równowagę Nasha, to $\underline{v} = \bar{v}$ i każdy punkt siodłowy jest równowagą Nasha.

Dowód. Zauważmy, że

$$\underline{v} = \sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) = \inf_{y \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} \left(\inf_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \right) \leq \inf_{y \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, y) = \bar{v},$$

co dowodzi 1.

Niech (s_1^*, s_2^*) będzie równowagą Nasha. Z definicji, dla dowolnych $s_1 \in S_1$ i $s_2 \in S_2$,

$$u_1(s_1^*, s_2) \geq u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*).$$

Wobec tego

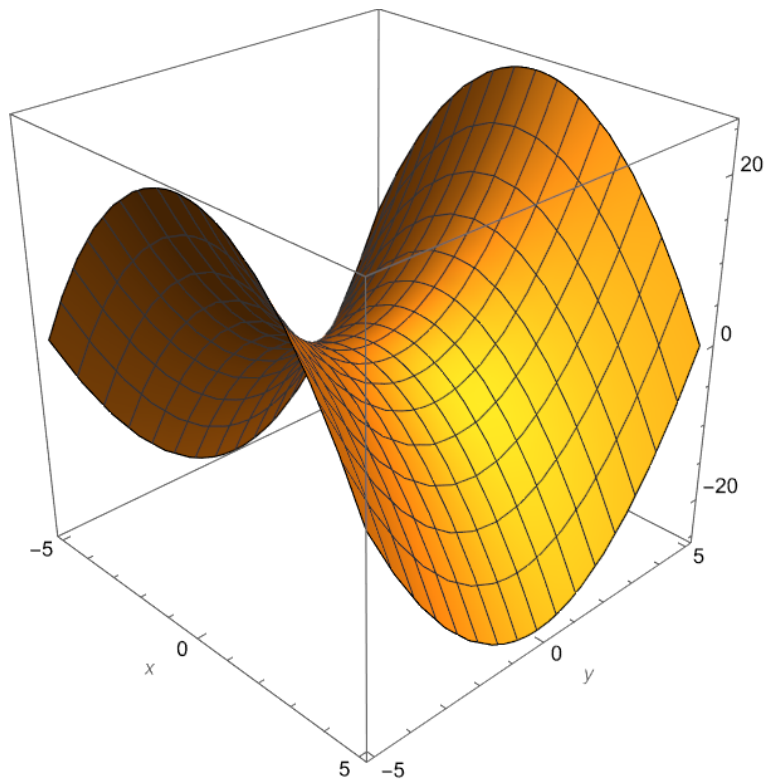
$$\underline{v} = \sup_{x \in S_1} \inf_{y \in S_2} u_1(x, y) \geq \inf_{y \in S_2} u_1(s_1^*, y) = u_1(s_1^*, s_2^*) = \sup_{x \in S_1} u_1(x, s_2^*) \geq \inf_{y \in S_2} \sup_{x \in S_1} u_1(x, y) = \bar{v}.$$

Zatem nierówności są równościami, czyli strategie minimaksowe są równowagami Nasha. $\square$

Definicja 26. Profile strategii, które mają wartość u_1 z przedziału $[\underline{v}, \bar{v}]$, nazywają się **strategiami bezpieczeństwa**.

Uwaga 44. Zaprezentowaną technikę pochodzącą od J. von Neumanna, można łączyć z algorytmem usuwania strategii zdominowanych.

Przykład 16. Rozważmy grę dwuosobową o sumie zerowej $u_1(x, y) = -x^2 + y^2 = -u_2(x, y)$, gdzie $S_1 = S_2 = [-5, 5]$.



$\inf_{y \in S_2} u_1(x, y) = -x^2$, $\sup_{x \in S_1} u_1(x, y) = y^2$. $\sup_{x \in S_1} \inf_{y \in S_2} u_1(x, y) = 0 = \inf_{y \in S_2} \sup_{x \in S_1} u_1(x, y)$. Te wartości realizowane są dla punktu $(0, 0)$, czyli jest on punktem siodłowym, co zbiega się z terminologią z analizy wielowymiarowej. Zauważmy, że zachodzi ogólna własność: $u_1(x, 0) \leq u_1(0, 0) \leq u_1(0, y)$ dla dowolnych x, y .

5 Wykład 5

5.1 Strategie zrandomizowane, mieszana równowaga Nasha

Definicja 27. Niech $(P = [n], S, u)$ będzie grą skończoną w postaci normalnej.

Strategią mieszaną gracza i nazywamy rozkład prawdopodobieństwa (probability mass function) $\pi_i : S_i \rightarrow [0, 1]$.

Strategią mieszaną gry nazywamy rozkład produktowy (łączny) $\pi := \prod_{i=1}^n \pi_i : S \rightarrow [0, 1]$. Wypłatą gracza j jest wtedy wartość oczekiwana:

$$u_j(\pi) := \mathbb{E}_\pi(u_j) = \sum_{s_j \in S_j} \sum_{s_{-j} \in S_{-j}} u_j(\langle s_j, s_{-j} \rangle) \pi(\langle s_j, s_{-j} \rangle).$$

Zbiór wszystkich rozkładów gracza i (i -tych rozkładów brzegowych) oznaczamy przez Δ_i , a ich produkt przez $\Delta = \times_{i=1}^n \Delta_i$.

Uwaga 45. Zarówno Δ_i , jak i Δ mogą być interpretowane jako sympleksy skończenie-wymiarowe (ważne jest założenie o skończoności gry).

Uwaga 46. Jeśli nie wskazano inaczej, zakładamy, że $(\pi_i)_{i=1}^n$ są niezależne.

Uwaga 47. Przy pewnych założeniach dla rozkładów brzegowych, można określić również strategie mieszane na grach nieskończonych.

Przykład 17 (Koncert — battle of sexes). Para umówiła się, że spotkają się na koncercie rockowym, ale jednocześnie w mieście grają dwa zespoły. Muszą wybrać na który zespół idą. Mogą zastosować dwie strategie mieszane $\pi_K = (p, 1 - p)$ oraz $\pi_M = (q, 1 - q)$.

		s_M		q	$(1-q)$
				Yes	ELO
s_K	p	Yes	5	2	1
	$(1-p)$	ELO	-2	-2	5
				-2	2

Wówczas $u_1(\pi) = 5pq + p(1 - q) - 2q(1 - p) + 2(1 - p)(1 - q) = 2 - p - 4q + 8pq$ oraz $u_2(\pi) = 2pq + p(1 - q) - 2q(1 - p) + 5(1 - p)(1 - q) = 5 - 4p - 7q + 8pq$.

Potrzebne jest nieco ogólniejsze pojęcie równowagi:

Definicja 28 (Mieszana równowaga Nasha). **(Mieszana) równowagą Nasha (MNE)** nazywamy rozkład łączny π^* taki, że

$$(\forall i \in [n])(\forall \pi_i \in \Delta_i) u_i(\pi^*) \geq u_i(\langle \pi_i, \pi_{-i}^* \rangle).$$

Uwaga 48. Definicja MNE jest zgodna z definicją PNE. Wystarczy zamienić zbiór dostępnych strategii S w definicji PNE na Δ (tam nie zakładaliśmy skończoności gry). W szczególności oznacza to, że mieszana strategia gracza i , będąca w równowadze Nasha jest najlepszą odpowiedzią w Δ .

Innymi słowy: MNE dla gry skończonej jest PNE dla pewnej innej, podobnej gry.

Uwaga 49. Analogicznie można zmieniać inne definicje, zamieniając S na Δ .

Przykład 17 (Koncerty; c.d.). Szukamy mieszanych równowag Nasha. Zauważmy, że $u_1(\pi) = 2 - 4q + p(8q - 1)$ oraz $u_2(\pi) = 5 - 4p + q(8p - 7)$. Wobec tego, mamy po 3 opcje najlepszych odpowiedzi:

$$p = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } q < \frac{1}{8}, \\ 1 & \text{jeśli } q > \frac{1}{8}, \\ ? & \text{jeśli } q = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } p < \frac{7}{8}, \\ 1 & \text{jeśli } p > \frac{7}{8}, \\ ? & \text{jeśli } p = \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Jeśli $p = 0$, to $q = 0$, i vice versa. Jeśli $p = 1$, to $q = 1$, i vice versa. Jeśli wobec tego $p \notin \{0, 1\}$, to $q = \frac{1}{8}$, czyli $p = \frac{7}{8}$. Otrzymujemy dwie czyste równowagi Nasha (PNE): $((0, 1), (0, 1))$ oraz $((1, 0), (1, 0))$, a także 3 mieszane równowagi Nasha (MNE), czyli dwie poprzednie i dodatkowo: $\pi = ((\frac{7}{8}, \frac{1}{8}), (\frac{1}{8}, \frac{7}{8}))$. W pierwszych dwóch wypadkach wypłaty mamy uwzględnione w tabeli. W ostatnim, $u_1(\pi) = 1, 5 = u_2(\pi)$.

Twierdzenie 5.1. Każda czysta równowaga Nasha $s^* \in S$ jest mieszaną równowagą Nasha.

Dowód. Niech $\pi_i \in \Delta_i$. Wtedy

$$u_i(\langle \pi_i, s_{-i}^* \rangle) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(\langle s_i, s_{-i}^* \rangle) \pi_i(s_i) \leq \sum_{s_i \in S_i} u_i(\langle s_i^*, s_{-i}^* \rangle) \pi_i(s_i) = u_i(s^*),$$

co kończy dowód. □

Definicja 29. Nośnikiem rozkładu łącznego strategii mieszanej π nazywamy zbiór $\text{Supp}(\pi) = \{s \in S : \pi(s) > 0\}$. Nośnikiem rozkładu strategii mieszanej gracza π_i nazywamy zbiór $\text{Supp}(\pi_i) = \{s_i \in S_i : \pi_i(s_i) > 0\}$.

Przykład 17. W koncertowym przykładzie mieliśmy 3 różne nośniki dla równowag Nasha: $\{(Yes, Yes)\}$, $\{(ELO, ELO)\}$ dla równowag czystych oraz $\{(Yes, Yes), (Yes, ELO), (ELO, Yes), (ELO, ELO)\}$ dla ostatniej.

Twierdzenie 5.2 (Równość wypłat). Niech $\pi^* \in \Delta$ będzie MNE. Wtedy $(\forall s_i \in \text{Supp}(\pi_i^*)) u_i(\langle s_i, \pi_{-i}^* \rangle) = u_i(\pi^*)$.

Dowód. Jeśli $|\text{Supp}(\pi_i^*)| = 1$, to twierdzenie jest trywialne. Niech zatem będzie większe i niech $s'_i \in \text{Supp}(\pi_i^*)$ będzie strategią czystą, że $u_i(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) > u_i(\pi^*)$ oraz taką, że maksymalizuje tę wypłatę w $\text{Supp}(\pi_i^*)$. Wtedy

$$u_i(\pi^*) = \sum_{s_i \in \text{Supp}(\pi_i^*)} u_i(\langle s_i, \pi_{-i}^* \rangle) \pi_i^*(s_i) < u_i(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) \pi_i^*(s'_i) + \sum_{s_i \in \text{Supp}(\pi_i^*) \setminus \{s'_i\}} u_i(\langle s_i, \pi_{-i}^* \rangle) \pi_i^*(s_i) = u_i(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle).$$

Zatem π^* musiałoby nie być MNE — sprzeczność. □

Uwaga 50. Przypadek $u_i(\langle s'_i, \pi_{-i}^* \rangle) < u_i(\pi^*)$ występuje tylko wtedy, gdy pojawi się też s'_i , które spełnia tę nierówność w drugą stronę.

Uwaga 51. Skoro zmiana decyzji gracza ze stanu MNE, nie zmienia jego wypłaty, to dlaczego ma ją grać? Gdyby co najmniej dwaj gracze zmienili swoje decyzje, wypłaty mogłyby ulec pogorszeniu.

5.2 Twierdzenie Nasha

Twierdzenie 5.3 (Nash). Rozważmy $\Gamma = (P = [n], S, u)$ będzie grą w postaci normalnej. Niech każdy ze zbiorów strategii graczy S_i będzie zwartym i wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^k$. Dla każdego $i \in [n]$, niech u_i będzie ciągłą oraz $(\forall s_{-i} \in S_{-i}) s_i \mapsto u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle)$ — będzie funkcją wklęsłą. Wtedy Γ posiada co najmniej jedną mieszaną równowagę Nasha.

Dowód. Dla każdego $i \in [n]$ oraz $s_{-i} \in S_{-i}$, określamy $M_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(\langle s_i, s_{-i} \rangle) = \sup_{x \in S_i} u_i(\langle x, s_{-i} \rangle)\}$ —

zbiór najlepszych odpowiedzi gracza i na strategię s_{-i} . Rozważmy teraz funkcję $F : S \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(S_i)$, zadaną następująco:

$F(s) = \prod_{i=1}^n M_i(s_{-i})$. Co oznaczaby, że F ma punkt stały? — wtedy $s^* \in F(s^*)$, czyli s_i^* jest najlepszą odpowiedzią na s_{-i}^* , czyli jeśli F ma punkt stały, to jest równowagą Nasha.

Pokażemy, że tak faktycznie jest:

1. Produkt zbiorów zwartych i wypukłych w topologii produktowej jest zwarty (tw. Tichonowa) i wypukły, więc S też jest taki.
2. Funkcje u_i są ciągłe i określone na zbiorze zwartym, więc z tw. Weierstrassa, osiągają swoje kresy, wobec czego M_i jest zawsze niepusty.
3. $u_i(\langle \cdot, s_{-i} \rangle)$ jest wklęsła, więc, jeśli $x_i, x'_i \in M_i(s_{-i})$, to

$$(\forall \alpha \in [0, 1]) \alpha u_i(\langle x_i, s_{-i} \rangle) + (1 - \alpha) u_i(\langle x'_i, s_{-i} \rangle) \leq u_i(\langle \alpha x_i + (1 - \alpha) x'_i, s_{-i} \rangle),$$

ale z definicji M_i ta nierówność może być spełniona jedynie kiedy jest tam równość. Oznacza to, że $M_i(s_{-i})$ jest zbiorem wypukłym. Wobec tego, $(\forall s \in S) F(s)$ jest zbiorem wypukłym.

4. M_i osiąga dla danego parametru tylko 1 supremum. Jego singleton jest zbiorem domkniętym. Skoro u_i jest ciągła, to przeciwobraz tego singletonu przez tę funkcję to zbiór domknięty, w zbiorze zwartym S_i , czyli jest to podzbiór domknięty i ograniczony, a zatem $M_i(s_{-i})$ jest zawsze zwarty, a stąd $F(s)$, jako produkt, również.
5. Ustalmy na moment $i \in [n]$. Pokażemy teraz domkniętość wykresu M_i . Niech $S_i \times S_{-i} \ni (x_j, y_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (x^*, y^*)$ oraz, że $x_j \in M_i(y_{-j})$, czyli $(\forall s_i \in S_i) u_i(\langle s_i, y_j \rangle) \leq u_i(\langle x_j, y_j \rangle)$. u_i jest ciągła, więc $(\forall s_i \in S_i) u_i(\langle s_i, y^* \rangle) \leq u_i(\langle x^*, y^* \rangle)$, czyli $x^* \in M_i(y^*)$.

Spełnione są zatem założenia tw. Kakutaniego, czyli Γ ma równowagę Nasha. $\square$

Uwaga 52. Zauważmy, że od zbiorów strategii graczy wymagaliśmy tylko zwartości i wypukłości.

W szczególności, na ćwiczeniach pokazaliśmy, że Δ_i w strategiach mieszanych są sympleksami (czyli zbiorami zwartymi, wypukłymi). Wobec tego każda gra skończona posiada MNE.

Uwaga 53. Dowód pokazuje jak (w naturalny sposób) szukać równowag Nasha. Czyste równowagi Nasha dla skończonych rodzin strategii będą istniały, gdy ciąg adaptowanych strategii ustalanych przy pomocy najlepszych odpowiedzi, będzie zbieżny.

Uwaga 54. Schemat rozumowania w tym dowodzie pojawia się w wielu rozumowaniach w teorii gier.

Przykład 18 (Graf najlepszych odpowiedzi vs iteracja algorytmu z dowodu).

Aby stworzyć graf najlepszych odpowiedzi, rysujemy dla każdego gracza strzałki porównujące strategie czyste, przy założeniu odpowiedzi wszystkich innych graczy, od gorszej wypłaty, do lepszej. Przykładowo, gdy gracz 2. zagra A., graczowi pierwszemu opłaca się zagrać Y nad X i Z, czyli rysujemy strzałki od (X,A) i (Z,A) w kierunku (Y,A). Robimy tak dla wszystkich możliwych odpowiedzi i każdego gracza z osobna.

$s_1 \backslash s_2$	A	B	C
X	-1 / -1	0 / 2	-1 / 5
Y	2 / 0	3 / 3	4 / 2
Z	5 / -1	2 / 4	6 / 6

Z kolei, w dowodzie zakładaliśmy, że wszyscy gracze odpowiadają najlepiej na aktualny stan. Tzn. każdy z graczy porusza się o jeden krok zgodnie ze strzałką z grafu najlepszych odpowiedzi, tworząc w ten sposób 1 krok algorytmu. W powyższym przykładzie, algorytm zawsze zatrzyma się na (Z,Z), otrzymując w ten sposób równowagę Nasha.

Uwaga 55. W ogólności, algorytm może się w niektórych przypadkach zapętlić.

Przykład 19 (Natarczywy Adorator). Ponownie rozważamy grę o sumie zerowej. Z tw. o równości wypłat, rozważamy odpowiednie rozkłady brzegowe, parametryzowane p i q, odpowiednio dla 1. i 2. gracza.

$s_K \backslash s_A$	S	G	
S	-1	1	p
G	1	-1	1-p
	q	1-q	

Otrzymujemy MNE $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Można narysować graf najlepszych odpowiedzi. Można przedstawić to jako lewostronny cykl w powyższej tabeli. Oznacza to, że ta gra nie ma PNE.

5.3 Metoda Williamsa

Przykład 20 (Równość wypłat vs Metoda Williamsa 1). Rozważmy dwuosobową grę o sumie zerowej. Wtedy wystarczy, że rozważamy wypłaty 1. gracza.

$s_1 \backslash s_2$	A	B	C	D	min
X	1	3	2	5	1
Y	4	2	4	3	2
max	4	3	4	5	$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

Można zauważyć, że strategie C i D są zdominowane ($A \succeq_2 C$ oraz $B \succeq_2 D$). Wobec tego sprawdzamy warunek $u_2(\langle \pi_1, A \rangle) = u_2(\langle \pi_1, B \rangle) = -p - 4(1-p) = -3p - 2(1-p)$, czyli $p = 1-p = \frac{1}{2}$. Analogicznie $u_1(\langle X, \pi_2 \rangle) = u_1(\langle Y, \pi_2 \rangle)$, daje $q + 3(1-q) = 4q + 2(1-q)$, czyli $q = \frac{1}{4}$.

MNE jest $\pi = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0))$. $u_1(\pi) = 2, 5$.

Metoda Williamsa: rozwiązanie graficzne.

1. Przedstaw strategie 2. gracza jako punkty w przestrzeni $X \times Y$ odpowiedzi gracza 1.
2. Znajdź otoczkę wypukłą tych punktów.
3. Poprowadź prostą $X = Y$. Znajdź punkt z otoczki wypukłej, przeciętej z tą prostą, który minimalizuje wypłatę pierwszego gracza.

Przykład 21 (Metoda Williamsa 2). Kolejna gra o sumie zerowej

$s_K \backslash s_R$	A	B	C	D	E	min
X	0	0	3	1	2	0
Y	0	3	0	1	1	0
Z	3	0	0	2.5	2	0
max	3	3	3	2.5	2	$\begin{matrix} 2.5 \\ 0 \end{matrix}$

Z Metody Williamsa wychodzi, że $\frac{1}{3}(A + B + C)$ jest rozwiązaniem dla drugiego gracza. Analogicznie wychodzi $\frac{1}{3}(X + Y + Z)$ dla pierwszego.

Uwaga 56. Tym razem punkty rysujemy w przestrzeni $X \times Y \times Z$, a otoczkę kroimy z prostą $X = Y = Z$.

6 Wykład 6

6.1 Równowagi skorelowane

Definicja 30. Równowagą skorelowaną (albo **strategią skorelowaną**) nazywamy strategię mieszaną π^* (niekoniecznie o niezależnych współrzędnych (tj. rozkładach brzegowych)), zaproponowaną przez zaufaną **wyrocznię**, która spełnia warunek:

$$(\forall i \in [n])(\forall s_i \in S(\pi_i^*))(\forall \pi_i \in \Delta_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(\pi^*)} (u_i(s) - u_i(\langle \pi_i, s_{-i} \rangle)) \mathbb{P}[\sigma = s | \sigma_i = s_i] \geq 0,$$

gdzie σ oznacza realizację zmiennej losowej o rozkładzie π^* .

Uwaga 57. Różnica powyższych wypłat jest warunkową wartością oczekiwaną.

Uwaga 58. Aby strategia skorelowana działała, musi istnieć zaufana wyrocznia (instytucja), która zgodnie z jawną strategią skorelowaną przekaże graczom jakie strategie powinni zagrać.

Jeśli gracze ufają wyroczni, to powinni wybrać zaproponowane strategie, bo wybór innej spowoduje, że średnio mogą stracić.

Twierdzenie 6.1. Każda równowaga Nasha jest równowagą skorelowaną.

Uwaga 59. Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia o równości wypłat.

Uwaga 60. Szukanie równowag Nasha jest trudne, a równowag skorelowanych jest nawet więcej.

Przykład 22 (Gra w cykora).

		s_2	
		C	W
s_1	C	1 / 1	10 / -10
	W	-10 / 10	-100 / -100

Równowagi Nasha: $(W, C), (C, W), ((\frac{10}{11}, \frac{1}{11}), (\frac{10}{11}, \frac{1}{11}))$. Wagi poszczególnych profili strategii: (p, q, r, s) (odpowiednio dla profili $((C, C), (C, W), (W, C), (W, W))$), $p + q + r + s = 1$.

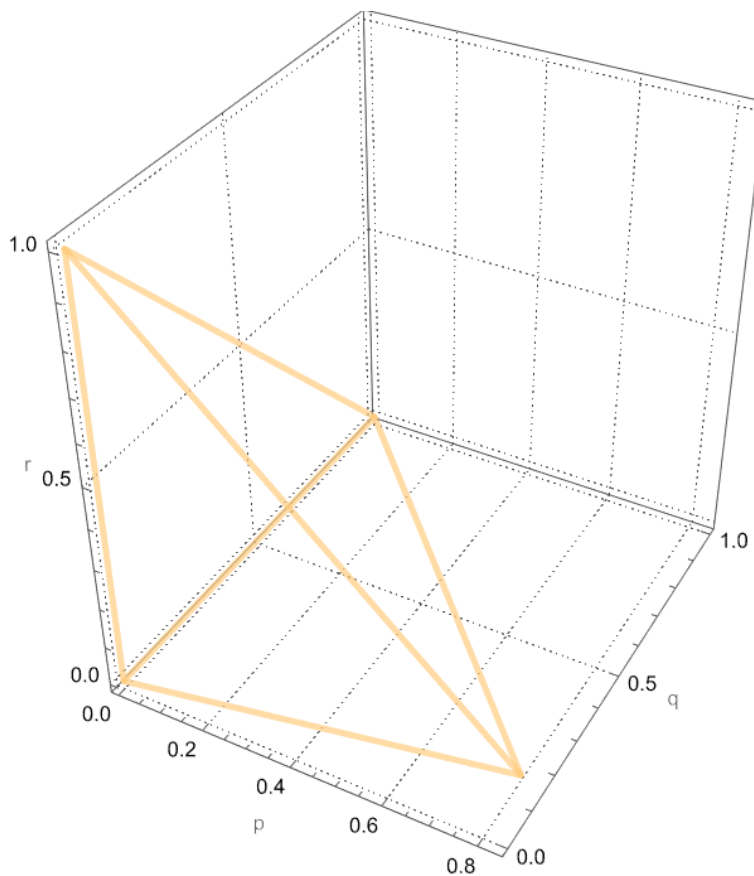
Nierówności równowag skorelowanych:

- gdy 1. gracz ma zagrać cykora: $(1 - 10)p + (-10 - (-100))q \geq 0$,
- gdy 1. gracz ma zagrać wariata $(10 - 1)r + (-100 - (-10))s \geq 0$,
- symetrycznie dla drugiego gracza.

Zatem $10q \geq p$, $10r \geq p$, $\frac{r}{10} \geq s = 1 - p - q - r$ i $\frac{q}{10} \geq s = 1 - p - q - r$.

Szukając optimum możemy np. szukać maksimum sumy wypłat, czyli $2p + 0q + 0r - 200s$. Wtedy $s = 0$, czyli $p + q + r = 1$. Wtedy dwie pierwsze nierówności ograniczają nam p przez $\frac{5}{6}$, co daje rozkład $(\frac{5}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0)$.

Dopuszczalne profile strategii są w $[0, 1]^4$, ale są równocześnie sympleksem 3-wymiarowym, więc można je zanurzyć w przestrzeni trójwymiarowej, tworząc wykres jedynie po zmiennych (p, q, r) (bo $s = 1 - p - q - r$). Okazuje się, że w tym przypadku każda strategia skorelowana jest kombinacją wypukłą 4 powyżej podanych strategii skorelowanych. Wobec tego wielościan równowag skorelowanych wygląda następująco:



Potencjalnych narożników wielościanu jest $\binom{8}{4} = 70$, ale można myśleć, że 8 nierówności występuje parami, jako ograniczenia na dany wymiar, bo niektóre nierówności wynikają z innych jak: $10q \geq p$ i $p \geq 0$ implikują $q \geq 0$. Jeśli patrzeć na to w ten sposób, otrzymamy 4 nierówności, czyli część wspólną 4 półhiper-płaszczyzn zanurzonych w 3 wymiarach, co ogranicza możliwość do co przy zanurzeniu sympleksu w 3 wymiarach da nam w rezultacie wielościan o maksymalnie 5 wierzchołkach.

Uwaga 61. Warunek równowagi skorelowanej wyznacza ciąg nierówności liniowych. Gdy maksymalizujemy sumę wypłat, mamy do czynienia z problemem programowania liniowego.

Twierdzenie 6.2. W grach dwuosobowych, równowagi Nasha są wierzchołkami wielościanów wyznaczonych przez nierówności dla równowag skorelowanych.

7 Wykład 6

7.1 Szukanie równowag Nasha w grach dwumacierzowych

Uwaga 62. Jak działał algorytm szukania równowag Nasha?

1. Wykreśl strategie (ściśle) zdominowane.
2. Heurystycznie należy wyznaczyć nośnik równowag Nasha, rozwiązując układy równań, opartych o tw. o równości wypłat
3. Sprawdź, czy dają one równowagę Nasha.

Uwaga 63. Przypuśćmy, że dla gry dwuosobowej o sumie stałej istnieje wartość gry v . Wtedy gracz 2. chce zminimalizować v przy założeniach:

$$(\forall s_1 \in S_1) \sum_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) \pi_2(s_2) \leq v$$

oraz $\sum_{s_2 \in S_2} \pi_2(s_2) = 1, (\forall s_2 \in S_2) \pi_2(s_2) \geq 0$. Jest to oczywiście problem programowania liniowego. Jest to alternatywna opcja szukania równowag dla gier minimaksowych.

Rozważmy teraz gry dwumacierzowe zadane przez macierze $A = [a_{ij}]$ (dla gracza 1.) i $B = [b_{ij}]$ (dla gracza 2.). Zakładamy, że $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, tzn. gracze mają odpowiednio m i n strategii czystych. Oczywiście oznacza to, że $u(s_1 = i, s_2 = j) = (a_{ij}, b_{ij})$. Niech ponadto $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ będzie mieszaną równowagą Nasha (o niezależnych rozkładach brzegowych). Niech $u(\pi) = (v_1, v_2)$. Z definicji równowagi Nasha wynika, że

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \pi(i, j) = v_1$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \pi(i, j) = v_2.$$

Z tw. o równości wypłat wynika, że

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \pi_2(j) \begin{cases} = v_1 & \text{dla } i \in \text{Supp}(\pi_1) \\ \leq v_1 & \text{dla } i \notin \text{Supp}(\pi_1) \end{cases}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} \pi_1(i) \begin{cases} = v_2 & \text{dla } j \in S_2(\pi_2) \\ \leq v_2 & \text{dla } j \notin S_2(\pi_2) \end{cases}$$

Dla uniwersalności, spróbujmy to unormować przez podstawienie $x = \frac{\pi_1}{v_2}$ i $y = \frac{\pi_2}{v_1}$. Zmieni to powyższe układy tak, żeby po prawych stronach były zawsze 1. Ponadto zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_1} = \frac{v_1}{v_1 v_2} + \frac{v_2}{v_1 v_2} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) x_i y_j.$$

Twierdzenie 7.1 (Lemke—Howson). Niech $z = (x \parallel y)^T \in \mathcal{M}_{(m+n) \times 1}$, $\mathbb{1}_{m+n} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathcal{M}_{(m+n) \times 1}$ oraz niech $C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$, gdzie wartości macierzy A oraz B są dodatnie. Wtedy dowolne niezerowe rozwiązanie z^* problemu:

$$z \geq 0 \tag{2}$$

$$\mathbb{1}_{m+n} - Cz \geq 0 \tag{3}$$

$$z^T (\mathbb{1}_{m+n} - Cz) = 0 \tag{4}$$

wyznacza $\pi = \left(\frac{x}{\sum_{i=1}^m x_i}, \frac{y}{\sum_{j=1}^n y_j} \right)$, które jest równowagą Nasha w grze dwumacierzowej z wypłatami zadanymi przez macierze A i B i vice versa, każda równowaga Nasha jest rozwiązaniem tego problemu.

Uwaga 64. Jeśli macierz C ma ujemne wpisy, należy dodać do wypłat z macierzy A i B tę samą stałą, aby uniknąć tego problemu.

Dowód. Niech π będzie równowagą Nasha dla gry o macierzach wypłat A i B . Wtedy

$$0 = \sum_{i=1}^m x_i \left(1 - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j\right) + \sum_{i=1}^n y_i \left(1 - \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) x_i y_j.$$

Ponadto

$$\begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \geq 0, \\ 1 - \sum_{i=1}^m b_{ij} y_j \geq 0. \end{cases}$$

Ponieważ π jest rozkładem prawdopodobieństwa, ostatni warunek problemu też jest spełniony.

W drugą stronę, założmy niewprost, że $(x+y)^T$ jest niezerowym rozwiązaniem problemu, a π nie jest równowagą Nasha. Zauważmy, żeby w poprzednim układzie nierówności nie było równości, podczas gdy wcześniejsza równość jest spełniona, rozwiązanie musi być zerowe (tu wykorzystujemy nieujemność elementów z C). Wobec tego

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \begin{cases} = 1 & \text{dla } x_i > 0 \\ < 1 & \text{dla } x_i = 0 \end{cases}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \begin{cases} = 1 & \text{dla } y_j > 0 \\ < 1 & \text{dla } y_j = 0 \end{cases}$$

co jest równoważne z wcześniej wyprowadzonymi układami równań i nierówności. Wobec tego π jest równowagą Nasha. $\square$

Uwaga 65. Problem z tego twierdzenia nazywa się *problemem komplementarności liniowej (LCP)*, gdzie 3. warunek jest warunkiem komplementarności liniowej.

Uwaga 66. Jeśli w dwóch pierwszych warunkach problemu zachodzi $m + n$ równości, to jesteśmy w wierzchołku pewnego wielościanu wypukłego zadanego przez te nierówności. Trzeci warunek sprawia, że w rozwiązaniu zachodzi tyle równości, a ponadto musi być to część wspólna l spośród $2l$ ścian (intuicyjnie: dla każdego wymiaru, 1 z 2 ograniczeń). Zawsze jednym z rozwiązań jest rozwiązanie zerowe.

Definicja 31 (Algorytm Lemkego—Howsona).

1. Niech z będzie rozwiązaniem zerowym, kładziemy $D|r = -C|\mathbb{1}_{m+n}^T$ (niech $D = [d_{ij}]$) oraz ustawiamy liczbę kroków $K = 1$.
2. Wybieramy dowolną kolumnę j_K macierzy D i szukamy $d_{i_K} = \min_i d_{ij_K}$.
3. Podmieniamy elementy macierzy D tak, żeby

$$\begin{aligned} & \bullet d_{i_K j_K} \leftarrow \frac{1}{d_{i_K j_K}}, \\ & \bullet d_{i_K j} \leftarrow -\frac{d_{i_K j}}{d_{i_K j_K}}, \text{ gdy } j \neq j_K, \\ & \bullet r_{i_K} \leftarrow -\frac{r_{i_K}}{d_{i_K j_K}}, \\ & \bullet d_{ij_K} \leftarrow \frac{d_{ij_K}}{d_{i_K j_K}}, \text{ gdy } i \neq i_K, \\ & \bullet d_{ij} \leftarrow d_{ij} - \frac{d_{i_K j} d_{ij_K}}{d_{i_K j_K}}, \text{ gdy } i \neq i_K \wedge j \neq j_K, \\ & \bullet r_i \leftarrow r_i - \frac{r_{i_K} d_{ij_K}}{d_{i_K j_K}}, \text{ gdy } i \neq i_K. \end{aligned}$$

4. Jeśli $j_1 = i_K$, to kończymy algorytm.

5. W przeciwnym razie $K \leftarrow K + 1$, wstawiamy $j_K = i_{K-1}$, szukamy $d_{i_K} = \min_i d_{ij_K}$ i wracamy do kroku 3.

Gdy w K tym kroku otrzymaliśmy i_K i j_K , to oznacza, że w rozwiązaniu $z_{j_K} = r_{i_K}$, gdzie wartość ta jest brana z końcowego wektora r .

Przykład 23. Z wykładu [P. Więcka](#), ze ss. 12-13.

Uwaga 67. Algorytm $L-H$ ma w najgorszym przypadku złożoność wykładniczą, ale zazwyczaj działa znacznie szybciej.

Uwaga 68. Nie ma gwarancji, że każdą równowagę Nasha można znaleźć przy pomocy algorytmu $L-H$. W szczególności nie ma gwarancji, że można otrzymać jakąkolwiek mieszaną równowagę, która nie jest czysta.

8 Wykład 7

8.1 Gry w postaci ekstensywnej (rozwinętej)

Definicja 32 (Gra w postaci ekstensywnej (pozycyjnej) (EFG)).

Krotkę $\Gamma = (P, \mathcal{T}, \mathbb{H}, \mathcal{A}, \rho, u)$ nazywamy **grą w postaci ekstensywnej**, jeśli:

1. P to skończony zbiór graczy. Będziemy pisać $P = [0 : n] := \{0\} \cup [n]$, gdzie 0 będzie „**natura**”, a $[n]$ będzie zbiorem zwykłych graczy.
2. $\mathcal{T} = (V = (D, L), r \in V, \text{pre} : V \setminus \{r\} \rightarrow D)$ jest skończonym drzewem ukorzenionym o wierzchołkach V i korzeniu r . Zbiór wierzchołków $V = D \cup L$ jest podzielony na zbiór liści L i zbiór wierzchołków decyzyjnych D (dla nietrywialnych gier $r \in D$). Wierzchołki z V reprezentują **stany gry**. W szczególności, wierzchołki z L oznaczają **stany końcowe** gry, a D reprezentuje stany, w których gracze podejmują decyzje (tzw. **stany decyzyjne**). Ponadto krawędzie zadane są poprzez funkcję $\text{pre} : V \setminus \{r\} \rightarrow D$, która danemu wierzchołkowi przypisuje poprzednika (ojca) w drzewie. Dodatkowo definiujemy funkcję $\text{succ} : D \rightarrow \mathcal{P}(V \setminus \{r\})$, która danemu wierzchołkowi przypisuje zbiór następników (synów) w drzewie. Dla każdego $l \in L$ istnieje najmniejsze $k \in \mathbb{N}$, że $\text{pre}^k(l) = r$. Wtedy $\text{path}(l) := \{\text{pre}^i(l) : i \in [0 : k]\}$ jest ścieżką stanów decyzyjnych graczy prowadzącą do zakończenia gry l .
3. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}_p)_{p \in P}$ jest **partycją informacyjną**, zadaną tak, że rozłączna suma $\bigcup \mathbb{H}$ jest partycją zbioru D (wobec tego, każdy wierzchołek z D odpowiada dokładnie jednemu graczowi), gdzie każde $\mathbb{H}_p$ jest **partycją zbiorów informacji gracza** p , tj. zakładamy, że $(\forall p \in P)(\forall H, H' \in \mathbb{H}_p) H \neq H' \rightarrow H \cap H' = \emptyset$. Wymagamy, aby żaden zbiór informacji H nie kroił się więcej, niż 1 raz z dowolną ścieżką, tj.

$$\left(\forall H \in \bigcup \mathbb{H} \right) (\forall l \in L) |H \cap \text{path}(l)| \leq 1.$$

$\mathbb{H}$ indukuje funkcję $P_V : D \rightarrow P$, która stanowi v przypisuje gracza, który w stanie v podejmuje decyzję.

4. $\mathcal{A} = (A(H))_{H \in \bigcup \mathbb{H}}$ jest rodziną zbiorów dostępnych akcji w każdym wierzchołku w zbiorze informacji. Co więcej, $\mathcal{A}$ indukuje funkcję $A_V : D \rightarrow \mathcal{A}$, która dla $v \in H \in \bigcup \mathbb{H}$, zwraca $A_V(v) = A(H)$, co oznacza, że $A_V(v)$ jest zbiorem dostępnych akcji w stanie $v \in H$. Wobec tego, zasadne jest, żeby każdy zbiór $H \in \bigcup \mathbb{H}$ interpretować jako pewną klasę abstrakcji, co oznacza, że gracz p nie jest w stanie rozpoznać, w którym wierzchołku $v \in H \in \mathbb{H}_p$ się znajduje w momencie podejmowania decyzji. Ponadto można w podobny sposób wydefiniować funkcję $a : V \setminus \{r\} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$, która wierzchołkowi v przypisuje akcję, która podjęta w $\text{pre}(v)$, prowadzi do stanu v .
5. $\rho = (\rho_H)_{H \in \mathbb{H}_0}$ jest wektorem rozkładów prawdopodobieństwa $\rho_H \in [0, 1]^{A(H)}$ losowych akcji „**natury**”.
6. $u = (u_p)_{p \in [n]}$ jest wektorem profili wypłat zwykłych graczy w stanach końcowych gry L , t.j. $(\forall p \in [n]) u_p : L \rightarrow \mathbb{R}$.

Uwaga 69. Jeśli nie było powiedziane inaczej, to zakładamy, że zbiory akcji zawierają tylko deterministyczne akcje. Ogólnie mogą zawierać pewne strategie mieszane.

Uwaga 70. Część z graczy może znać wyniki losowań „**natury**” *post factum* (zostaje to ujęte również przy pomocy zbiorów informacyjnych gracza).

Uwaga 71. Każdą grę EFG można traktować jako grę o sumie zerowej, gdzie $u_0 \equiv - \sum_{p \in [n]} u_p$.

Uwaga 72. Potencjalnie może istnieć $\mathbb{H}_p$, który jest pusty. Wtedy gracz p nie ma wpływu na przebieg gry.

Przykład 24 (Gra w 3 zapałki). Mamy stosik z 4 zapałkami i dwóch graczy. Każdy z graczy zabiera od 1 do 3 zapałek ze stosiku. Wygrywa ten, który zabierze ostatnią zapałkę. [drzewo]

Definicja 33. Jeśli $\mathbb{H}_0 = \emptyset$ i $(\forall p \in P \setminus \{0\})(\forall H \in \mathbb{H}_p) |H| = 1$, to mówimy, że jest to **gra o pełnej informacji (PIEFG)**. W przeciwnym razie — **o niepełnej informacji (IIEFG)**.

Uwaga 73. Grę w 3 zapałki można uważać zarówno jako PIEFG (jeśli rozdzielimy zbiory informacyjne), jak i IIEFG.

Przykład 25 (Gra z monetami). Natura losuje stronę monety. Gracz 1. próbuje zgadnąć wynik losowania. Jeśli zgadł, to otrzymuje 1, a jeśli przegra, to traci 1.

Definicja 34. Przez $S_p = \prod_{H \in \mathbb{H}_p} A(H)$ określamy zbiór strategii zachowania gracza p . Mówimy, że **strategia** zachowania gracza p jest **czysta**, jeśli wszystkie akcje gracza p w tej strategii są deterministyczne. W przeciwnym razie mówimy o **mieszanej strategii zachowania**.
Co więcej, $S := \prod_{p \in P} S_p$ jest zbiorem (profilu) strategii w grze Γ .

Uwaga 74. Gdy $(\forall p \in P) s_p \in S_p$ są strategiami czystymi, to gra Γ przyjmuje postać strategiczną (być może o niepełnej macierzy wypłat). Gdy każdy poziom drzewa tworzy osobny zbiór informacyjny jednego z graczy, to gra ma pełną macierz wypłat (jak w klasycznym przypadku gry strategicznej).

Uwaga 75. Wszystkie dotychczasowe pojęcia jak np. równowagi Nasha, najlepsze odpowiedzi, optima Pareta, czy gry o sumie stałej, definiujemy w ten sam sposób jak wcześniej.

9 Wykład 8

9.1 Podgry w postaci ekstensywnej; Równowaga doskonała

Przykład 26. „Natura” rzuca symetryczną monetą (zarówno orzeł, jak i reszka, wypadają z pr. $\frac{1}{2}$). Pierwszy gracz zgaduje co wypadło. Potem drugi gracz zgaduje, czy pierwszy gracz zgadł. Zgadnięcie daje wypłatę 1., a niezgadnięcie — -1. Każda strategia czysta jest równowagą Nasha. Także każda strategia mieszana. Jeśli moneta nie jest symetryczna, to sprawa się nieco zmienia.

Definicja 35 (Podgra w postaci ekstensywnej).

Niech $\Gamma = (P, \mathcal{T}, \mathbb{H}, \rho, u)$ będzie EFG.

Na V wprowadzamy najmniejszą relację częściowego porządku $\leq$, która rozszerza $\{(v, \text{pre}(v)) : v \in V \setminus \{r\}\}$ (standardowy porządek na drzewach ukorzenionych). Rozważmy teraz $H \in \bigcup \mathbb{H}$ takie, że $H = \{w\}$ dla pewnego $w \in V$. Zdefiniujmy $V_w = \{v \in V : v \leq w\}$. **Podgrą** Γ' gry Γ , o korzeniu w , nazywamy grę Γ obciętą do drzewa o wierzchołkach V_w .

Uwaga 76. Zbiory D, L kroimy z V_w , a $\mathbb{H}_p$ z $\mathcal{P}(V_w)$. Reszta definicji jest wyprowadzana dla tych obcięć. M.in. zbiór graczy można ograniczyć do $P_V[V_w]$.

Uwaga 77. Podobna konstrukcja dla w , który należy do większego zbioru informacji, jest niezdefiniowana.

Przykład 27 (Arbitralne drzewko gry z pełną informacją).

Definicja 36. **Strategią postępowania gracza p** nazywamy produkt $\prod_{H \in \mathbb{H}_p} \pi_{A(H)}$ niezależnych rozkładów na zbiorach akcji gracza p . Produkt takich strategii dla wszystkich graczy nazywamy **strategią postępowania w grze**.

Twierdzenie 9.1 (Kuhn). W PIEFG, strategię postępowania są równoważne ze strategiami mieszanymi.

Uwaga 78. Stąd wynika, że definicja EFG dla zrandomizowanych zbiorów akcji jest także poprawna, tzn. niekoniecznie obchodzi nas jakiego typu są akcje graczy.

Wniosek z poprzedniego tw. to

Twierdzenie 9.2 (Kuhn). Każda PIEFG ma MNE.

Twierdzenie 9.3 (Kuhn). Każda PIEFG ma PNE.

Dowód. Szkic — wykonujemy indukcję wsteczną ze względu na rozmiar drzewa „od dołu”. Dla $|D| = 1$, gracz ma najlepszą odpowiedź.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie podgry o korzeniach ze zbioru $\text{succ}(r)$ mają PNE. Wtedy $P_V(r)$ musi wybrać jedną ze swoich akcji z $A_V(r)$. Ale biorąc pod uwagę, że w strategii wszystkich graczy w podgrach są zgodne z PNE (bo nie opłaca im się od niej odstępować, to $P_V(r)$ ma najlepszą odpowiedź wybraną poprzez najlepszą dla niego wartość oczekiwaną wypłat. $\square$

Przykład 28 (c.d.).

Definicja 37 (Równowaga doskonała (Subgame Perfect Equilibrium; SPE)). **Równowagą doskonałą** nazywamy taki profil strategii, że w każdej podgrze jest on równowagą (mieszaną) Nasha.

Przykład 29 (Przykład EFG z niepełną informacją; w postaci strategicznej; metoda wyznaczania SPE).

10 Wykład 9

10.1 Aukcje

Definicja 38 (Aukcja). **Aukcją** nazywamy grę (domyślnie w postaci strategicznej), gdzie każdy z graczy p składa (w tajemnicy) pewną ofertę w_p za jakieś dobro, które według nich warte jest v_p . Na podstawie strategii graczy (ofert) i wartości licytowanego przedmiotu, podawane są wypłaty u oraz zwycięzcy aukcji (którzy dostają dobro). Z reguły jest jeden zwycięzca, ale niekoniecznie musi mieć on największą wypłatę. Z punktu widzenia teorii gier, zwycięzcy nie są istotni.

Przykład 30 (Prymitywna aukcja). Rozważmy aukcję, w której zwycięzcą zostaje gracz, który zalicytował najwyżej, ale dobro dostaje za darmo. Wobec tego

$$u_p = \begin{cases} v_p & \text{jeśli } w_p = \max_{i \in P} w_i, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Aukcja ta jest nierozsądna, bo każdemu opłaca się licytować jak najwyżej. Wobec tego ta gra nie ma żadnej równowagi.

Przykład 31 (Aukcja pierwszej ceny). Zwycięzcą zostaje gracz, który wylicytował najwyżej, i tyle też płaci. Wobec tego,

$$u_p = \begin{cases} v_p - w_p & , \text{ jeśli } w_p = \max_{i \in P} w_i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Powiedzmy, że gracz p -ty uznał przedmiot za najbardziej wartościowy. Przypuśćmy, że druga największa wartość to $v_{p'} = v_p - 1$. Zauważmy, że graczowi p nie opłaca się licytować $v_p - 2$, bo wtedy wygra gracz p' , jeśli zalicytuje $v_{p'}$. Z drugiej strony, mógłby licytować $v_p - 0.99$ i wygrać licytację z zyskiem 0.99. Ale nie wie, że druga największa wartość wynosi $v_p - 1$. Zakładając, że poza wypłatą, istotne w drugiej kolejności jest zwycięstwo, to za rozwiązanie można uznać zagranie przez wszystkich graczy $w_p = v_p$.

Przykład 32 (Aukcja Vickreya (aukcja drugiej kwoty)). Dla każdego gracza i , przedmiot (np. grafika Banksy'ego) wystawiany na aukcji ma wartość v_i . Każdy z graczy licytuje $w_i = v_i$ (w sposób niejawni, np. w kopertach). Wygrywa gracz z maksymalnym w_i (w przypadku remisu, losujemy zwycięzcę). Gracz wygrywający i płaci $v^* = \max_{j \in P \setminus \{i\}} v_j$, czyli wypłata jest zadana wzorami: $u_i(s) = v_i - v^*$, jeśli strategia s prowadzi do wygranej gracza i , a $u_i(s) = 0$, gdy s oznacza, że aukcję wygrał inny gracz.

Twierdzenie 10.1 (Vickreya). Zagranie $w_p = v_p$ w Aukcji Vickreya jest optymalne (jest to równowaga Nasha).

Dowód. Przypuśćmy, że w_p wygrywa. Przypuśćmy, że wtedy gracz p płaci w^* , więc $u_p = v_p - w^* \geq 0$. Przypuśćmy, że gracz p zagra w'_p i wciąż wygra. Wtedy jego wypłata się nie zmieni. Jeśli by nie wygrał, to $u_p = 0$, więc wypłata się nie polepszy.

Przypuśćmy, że w_p nie wygrywa, czyli $u_p = 0$. Dopóki w'_p nie będzie większe od $w_{p'} = \max_{i \in P} w_i$, to $u_p = 0$. Gdy jednak będzie większe, to $u_p = w'_p - w_{p'} < 0$. □

Uwaga 79. Twierdzenie Vickreya może być postrzegane jako przejaw, znanej z książki Adama Smitha z 1776, idei „niewidzialnej ręki”.

„[Każdy] myśli tylko o swym własnym zarobku, a jednak w tym, jak i w wielu innych przypadkach, jakaś niewidzialna ręka kieruje nim tak, aby zdążał do celu, którego wcale nie zamierzał osiągnąć. Społeczeństwo zaś, które wcale w tym nie bierze udziału, nie zawsze na tym źle wychodzi. Mając na celu swój własny interes, człowiek często popiera interesy społeczeństwa skuteczniej niż wtedy, gdy zamierza służyć im rzeczywiście. Nigdy nie zdarzyło mi się widzieć, aby wiele dobrego działo ludzi, którzy udawali, iż handlują dla dobra społecznego.”

Adam Smith, *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*

Definicja 39. Niech V_i oznacza zbiór możliwych wartości licytowanych przedmiotów przez gracza i . $V = \prod_{i \in P} V_i$

oraz $V_{-i} = \prod_{j \in P \setminus \{i\}} V_j$.

Mechanizm bezpośredniego ujawnienia (ang. *direct revelation mechanism*) (f, p) składa się z **funkcji wyboru społecznego** (ang. *social choice function*) $f : V \rightarrow A$, gdzie A to **zbiór możliwych rozstrzygnięć**, dla których gracze wyznaczają walutacje v_i , oraz $p = (p_1, \dots, p_n)$, gdzie $p_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, które są **płatnościami graczy** za grę w danej aukcji.

Funkcją dobra społecznego (ang. *social welfare function*) nazywamy funkcję $F \in \mathbb{R}^A$, określoną wzorem $F(a) = \sum_{i \in P} v_i(a)$.

Definicja 40. Mówimy, że mechanizm $(f, (p_1, \dots, p_n))$ jest **zgodny z motywacją** (ang. *incentive compatible*), jeśli

$$(\forall i \in P)(\forall V_i)(\forall V_{-i}) f(\langle v_i, v_{-i} \rangle) - p_i(\langle v_i, v_{-i} \rangle) \geq f(\langle v'_i, v_{-i} \rangle) - p_i(\langle v'_i, v_{-i} \rangle).$$

Uwaga 80. $f(\langle v_i, v_{-i} \rangle)$ może być postrzegane jako $v_i(a)$ dla pewnego $a \in A$.

Intuicja jest taka, że gracz i woli podać prawdziwą wartość v_i , niż fałszywą.

Definicja 41 (Mechanizm Vickreya — Clarke’a — Groovesa). Jest to mechanizm bezpośredniego ujawnienia, gdzie $f(v) \in$

$$\arg \max_{a \in A} \left(\sum_{i \in P} v_i(a) \right) \text{ i istnieją funkcje (dla } i \in P) h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ że } (\forall v \in V) p_i(v) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v))$$

Twierdzenie 10.2 (VCG). Każdy mechanizm VCG jest zgodny z motywacją.

Dowód. Niech $a = f(\langle v_i, v_{-i} \rangle)$ i $a' = f(\langle v'_i, v_{-i} \rangle)$ dla ustalonych i, v, v'_i . $u_i(v) = \sum_{i \in P} v_i(a) - h_i(v_{-i})$, a $u_i(\langle v'_i, v_{-i} \rangle) = v'_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a') - h_i(v_{-i})$. Ale a maksymalizuje dobro wspólne, więc $u_i(v) \geq u_i(\langle v'_i, v_{-i} \rangle)$. $\square$

Uwaga 81. Prosto by było przyjąć $h \equiv 0$ w definicji mechanizmu VCG. Oznaczałoby to, że „natura” wypłaca wszystkim graczom tę samą wartość, co nie ma wiele sensu.

Definicja 42. Mówimy, że mechanizm jest **indywidualnie racjonalny**, jeśli

$$(\forall i \in P)(\forall v \in V) u_i(v) = v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0.$$

Mówimy, że mechanizm **nie ma pozytywnego przepływu**, jeśli

$$(\forall i \in P) p_i(v) \geq 0.$$

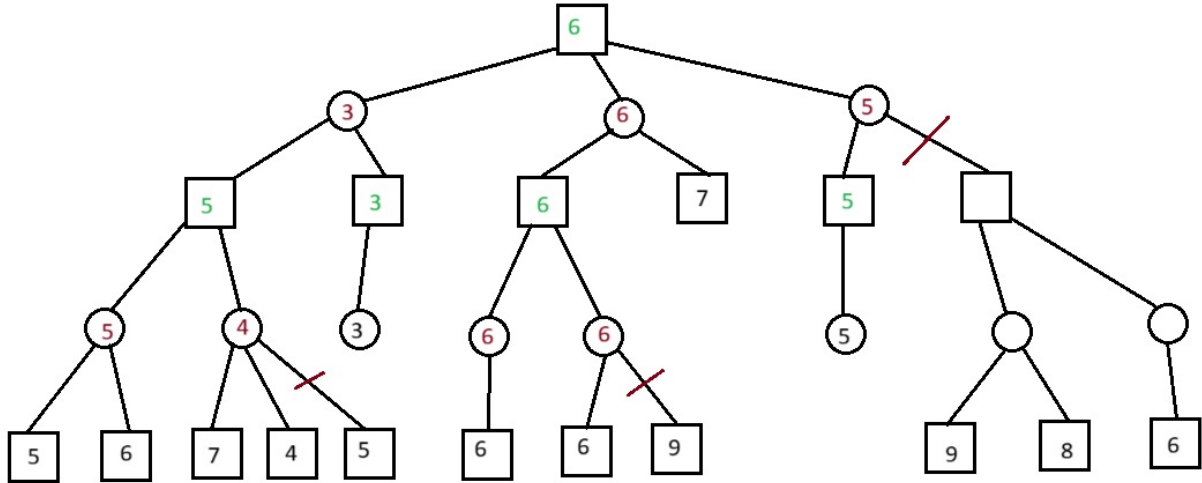
Definicja 43 (Reguła Clarke’a (Clark’s pivot rule)). $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ nazywamy **zapłatą Clarke’a**. Wtedy $p_i(v) =$

$$\max_{b \in A} (v_i(b) - v_i(a)), \text{ gdzie } a = f(v).$$

Twierdzenie 10.3 (Clarke). Mechanizm VCG z regułą Clarke’a nie ma pozytywnych przepływów. Jeśli $(\forall v_i \in V_i)(\forall a \in A) v_i(a) \geq 0$, to jest indywidually racjonalny.

Dowód. Niech $a = f(v)$ maksymalizuje $\sum_{i \in P} v_i(a)$ oraz $b \in A$ maksymalizuje $\sum_{j \neq i} v_j(b)$. Zauważmy, że $u_i(a) = v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_{i \in P} (v_i(a) - v_i(b)) \geq 0$. Pierwsza część: Skoro $b \in A$ maksymalizuje $\sum_{j \neq i} v_j(b)$, to $\sum_{j \neq i} (v_j(b) - v_j(a)) \geq 0$. $\square$

Przykład 33 (Aukcja Vickreya). $A = \{i \in P : i \text{ wygrywa}\}$. Jeśli dla $v \in V$, $i = f(v)$ (i wygrywa), to $p_i(v) = \max_{j \in P \setminus \{i\}} v_j(i)$, a dla $j \neq i$, $p_j(v) = 0$.



11 Wykład 10

11.1 Algorytm alfa-beta

Twierdzenie 11.1 (Algorytm alfa-beta). *Dana jest dwuosobowa EFG o sumie stałej. Określamy $\text{minmax}(v, \text{lev}) = \text{return } \text{alfabeta}(v, \text{lev}, -\infty, \infty)$, gdzie:*

```

procedure Alfabeta ( $v, \text{lev}, \alpha, \beta$ )                                     // koniec gry
1  if  $v \in L$  then
2    return  $u(v)$ 
3  if  $P_V(v) = 1$  then                                                 // tura 1. gracza
4    forall  $s \in \text{succ}(v)$  do
5       $\alpha = \max(\alpha, \text{Alfabeta}(w, \text{lev}+1, \alpha, \beta))$ 
6      if  $\alpha \geq \beta$  then
7        odcinamy gałąź Beta
8      return  $\alpha$ 
9  if  $P_V(v) = 2$  then                                                 // tura 2. gracza
10   forall  $s \in \text{succ}(v)$  do
11      $\beta = \min(\beta, \text{Alfabeta}(w, \text{lev}+1, \alpha, \beta))$ 
12     if  $\alpha \geq \beta$  then
13       odcinamy gałąź Alpha
14   return  $\beta$ 

```

Taki algorytm zwraca wartość gry dla równowagi doskonałej w grze o pełnej informacji.

Przykład 34. Gra o sumie zerowej. Kwadraty oznaczają maksymalizację przez 1. gracza, a kółka — minimalizację przez 2. gracza. kolorem czarnym oznaczone są wypłaty 1. gracza w stanach końcowych gry. Kreski oznaczają Alfa-cięcia (nie ma tutaj Beta-cięcia).

11.2 Gry koalicyjne

Definicja 44 (Gra w postaci koalicyjnej/kooperatywnej). **Gra koalicyjna z wypłatami ubocznymi** (ang. *transferable utilities*) to para (P, v) , gdzie P to skończony zbiór graczy, a $v : \mathcal{P}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia $v(\emptyset) = 0$ i $v(S)$ zadaje **siłę koalicyjną** (wartość koalicyjną) koalicji $S \subseteq P$, gdzie $v(S)$ ma być rozdyskrebowana między graczy w koalicji S . Zbiór P nazywamy **wielką koalicyją**.

Uwaga 82. Dopuszcza się, że gracze wymieniają pieniądze między sobą tak, aby gracze z koalicji S otrzymali w sumie wypłaty równe $v(S)$.

Definicja 45. Mówimy, że gra kooperacyjna jest **nad-addytywna**, gdy

$$(\forall S, T \subseteq P) ((S \cap T = \emptyset) \rightarrow (v(S) + v(T) \leq v(S \cup T))) .$$

Gra jest **monotoniczna**, gdy

$$(\forall S \subseteq T \subseteq P) v(S) \leq v(T) .$$

Mówimy, że gra kooperacyjna jest **wypukła**, gdy

$$(\forall S, T \subseteq P) (v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T)) .$$

Uwaga 83. Nad-addytywność oznacza opłacalność łączenia się w większe koalicje.

Wypukłość oznacza, że gracze mają niemniejsze wpływy w większych koalicjach.

Każda gra wypukła jest grą nad-addytywną.

Przykład 35 (Upadłość spółki). Spółka była winna pieniądze wierzycielom (graczom). Masa upadłościowa spółki M jest mniejsza od całkowitego długu $\sum_{i \in P} d_i$ (d_i to dług spółki wobec i -tego gracza). Wierzyciele muszą ustalić, którzy z nich przejmują masę upadłościową spółki i spłacają pozostałych wierzycieli. Wobec tego, dla koalicji S , która przejmując masę upadłościową, możemy określić: $v_1(S) = \max \left\{ 0, M - \sum_{i \notin S} d_i \right\}$ — ile zostanie S po spłaceniu pozostałych wierzycieli. Wtedy każdy z graczy $i \notin S$ otrzymuje d_i , ile $v_1(S) > 0$, a pewną część d_i , gdy $v_1(S) = 0$.

Podobnie, dla S , która pierwsza (bez uwzględnienia innych) realizuje swoją wierzytelność, określamy $v_2(S) = \min \left\{ M, \sum_{i \in S} d_i \right\}$.

Wtedy gracze spoza S , rozdzielają między sobą $M - \sum_{i \in S} d_i$.

Gra (P, v_1) jest nad-addytywna, a (P, v_2) — nie.

Wobec superaddytywności v_1 , w pierwszej grze opłaca im się utworzyć wielką koalicję.

Przykład 36. Dla gry $(\{1, 2, 3\}, v_1)$ oraz $M = 37$, $d = (15, 20, 30)$, mamy: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 2$, $v(\{1, 2\}) = 7$, $v(\{1, 3\}) = 17$, $v(\{2, 3\}) = 22$ i $v(\{1, 2, 3\}) = 37$.

Dla gry $(\{1, 2, 3\}, v_2)$ oraz $M = 37$, $d = (15, 20, 30)$, mamy $v(\{1\}) = 15$, $v(\{2\}) = 20$, $v(\{3\}) = 30$, $v(\{1, 2\}) = 35$, $v(\{1, 3\}) = 37$, $v(\{2, 3\}) = 37$ i $v(\{1, 2, 3\}) = 37$.

Fakt 12. Niech $(P = [n], S, u)$ będzie grą w postaci normalnej. Wtedy (P, v) jest grą w postaci koalicyjnej, gdzie, dla $T \subseteq P$:

$$v(T) = \max_{\pi_T \in \Delta_T^*} \min_{\pi_{-T} \in \Delta_{-T}^*} \sum_{i \in T} u_i(\langle \pi_T, \pi_{-T} \rangle) . \quad (5)$$

Uwaga 84. $\Delta_T = \times_{i \in T} \Delta_i$, a $\Delta_{-T} = \times_{i \notin T} \Delta_i$.

Fakt 13. Każdą grę nad-addytywną można otrzymać z pewnej gry w postaci normalnej za pomocą wzoru (5).

Definicja 46. Niech $P = [n]$. Wektorem wypłat w grze koalicyjnej, nazywamy $x \in \mathbb{R}^n$. Jest on

- **racjonalny grupowo (alokacja/podziałem)**, jeśli $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$,
- **racjonalny indywidualnie**, jeśli $(\forall i \in [n]) v(\{i\}) \leq x_i$,
- **racjonalny koalicyjnie (jest stabilny)**, gdy $(\forall S \subseteq P) v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$,
- **imputacją**, jeśli jest indywidualnie racjonalną alokacją.

Fakt 14. Nad-addytywna gra koalicyjna posiada podział.

Definicja 47. Zbiór $\mathcal{C}(v)$ stabilnych podziałów nazywamy **rdzeniem gry**.

Uwaga 85. Rdzeń gry może być pusty. Rdzeń jest domknięty i wypukły.

Przykład 37 (Napad na bank). Do przeniesienia 1 sztaby złota potrzeba 2 osób. Do banku z olbrzymią liczbą sztab złota włamuje się n włamywaczy (graczy). Mają czas tylko na jedno przejście.

$$v(S) = \begin{cases} \frac{|S|}{2} & , \text{ gdy } 2 \mid |S| , \\ \frac{|S|-1}{2} & , \text{ gdy } \neg(2 \mid |S|) . \end{cases}$$

Przypuśćmy, że $|P| = n$ i $\neg(2 \mid n)$. Rozważmy dowolny $S \subset P$, że $|S| = n-1$. Wtedy $v(P) = \frac{n-1}{2}$ oraz $v(S) = \frac{n-1}{2} \leq \sum_{i \in S} x_i$. Oznacza to, że $x_i \leq 0$ dla $i \notin S$. Wobec dowolności S , $\sum_{i \in P} x_i \leq 0 < v(P)$. Dlatego wtedy rdzeń jest pusty.

12 Wykład 11

Definicja 48. Mówimy, że gracze $i, j \in P$ są **zamienni względem v** , jeśli $(\forall S \subseteq P) ((i, j \notin S) \rightarrow (v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})))$.

Gracz i jest **nieistotny względem v** , gdy $(\forall S \not\ni i) v(S) = v(S \cup \{i\})$.

Mówimy, że gracz i ma **prawo weta**, jeśli $v(P \setminus \{i\}) = 0$ i $v[P(P)] \subset [0, \infty)$.

Jeśli $v[P(P)] \subseteq \{0, 1\}$, to mówimy, że (N, v) jest grą **prostą**.

Uwaga 86. Równoważnie: gra koalicyjna jest prosta, jeśli $(\forall S \subseteq P) v(S) \in \{0, 1\}$.

Fakt 15. Dla gier prostych w postaci koalicyjnej, gra ma niepusty rdzeń wtedy i tylko wtedy, gdy ma graczy z prawem weta. Składa się on wtedy z podziałów, gdzie gracze z prawem weta dostają sumaryczną wypłatę 1.

Definicja 49. Rozwiązaniem gry (P, v) nazywamy pewien zbiór podziałów $\Psi(v)$, zależny od wyboru v . Jeśli rozwiązanie jest jednoelementowe, to $\Psi(v)$ nazywamy **wartością gry**, a $\Psi_i(v)$ nazywamy wartością i -tego gracza.

Uwaga 87. Czasami rozwiązanie Ψ jest postrzegane jako multifunkcja argumentu v , określona na pewnym zbiorze dopuszczalnych funkcji sił koalicyjnych.

12.1 Wartość Shapleya

Definicja 50 (Shapley value (1951) — Nobel z ekonomii w 2012).

Wartością Shapleya nazywamy wartość gry, dla $i \in P$ zadaną wzorem:

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq P \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|P \setminus S| - 1)!}{|P|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Uwaga 88. Wartość Shapleya gracza i mówi jaki jest średni wkład w siłę koalicyjną tego gracza po wszystkich możliwych liniowych porządkach dodawania pojedynczych graczy do koalicji.

Przykład 38. 8 fabryk: L, R, M_1, M_2 produkują odpowiednio lewe i prawe Twixy, a ostatnie dwie — opakowania. Rozważmy prostą grę. Aby skomponować batonik, potrzeba 1 lewego i 1 prawego i opakowanie. Każda fabryka produkuje tyle samo sztuk na godzinę. Wobec czego, fabryki muszą kooperować ze sobą trójkami, żeby mogli sprzedać produkt końcowy. $v(S) = 1$ tylko wtedy gdy $\{L, R, M_1\} \subseteq S$ lub $\{L, R, M_2\} \subseteq S$. W przeciwnym razie, wynosi 0. $\Psi_L(v) = \frac{1}{24}(2 + 2 + 6) \cdot 1 = \frac{5}{12} = \Psi_R(v)$. $\Psi_{M_1}(v) = \Psi_{M_2}(v) = \frac{1}{24} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{12}$. Fabryki L i R mają prawo weta.

Fakt 16. W grach wypukłych, wartość Shapleya jest w rdzeniu gry.

Fakt 17 (Własności SV).

- **Wydajność:** Wartość Shapleya jest podziałem.
- **Symetria:** Dla wszystkich i, j , które są zamienne względem v , zachodzi $\Psi_i(v) = \Psi_j(v)$.
- **Liniowość:** $\Psi_i(av + bw) = a\Psi_i(v) + b\Psi_i(w)$.
- **Nieistotny gracz:** Jeśli i jest nieistotny wzgl. v , to $\Psi_i(v) = 0$.

Uwaga 89. Wartość Shapleya, to jedyna wartość gry, która spełnia powyższe 4 własności. Ponadto spełnia poniższy warunek:

• **Addytywność:** Gdy v jest nad-addytywna, to $\Psi(v)$ jest indywidualnie racjonalna. Jeśli jest pod-addytywna, to $\Psi_i(v) \leq v(\{i\})$ dla wszystkich i . Jeśli jest addytywna, to zachodzi równość.

Uwaga 90 (Predykcja). Zbiór pewnych cech, których używamy do predykcji możemy uznać za graczy. Siły koalicji będą wskazywały na jakość predykcji. Wtedy wartość Shapleya można użyć w kontekście analizy wariancji ANOVA, czy w machine learningu (np. LIME) Podobny model można wykorzystać w szeregach czasowych do zdefiniowania slidShap (X 2023), gdzie siły koalicyjne są wyznaczane są przy pomocy entropii Shannona, a który to służy do predykcji przyszłych wartości ciągu wektorów losowych.

Twierdzenie 12.1 (Bondareva(1963)—Shapley(1967)). Dla gry (P, v) w postaci koalicyjnej, warunek:

$$(\forall \alpha : P(P) \rightarrow [0, 1]) \left((\forall i \in P) \left(\left(\sum_{S \ni i} \alpha(S) = 1 \right) \rightarrow \left(\sum_S \alpha(S) v(S) \leq v(P) \right) \right) \right)$$

jest równoważny z posiadaniem niepustego rdzenia.

Uwaga 91. Z powyższego można wywnioskować, że gra wypukła ma niepusty rdzeń.

12.2 Indeksy siły

Definicja 51 (Indeksy siły Shapleya-Shubika i Banzhafa). Rozważmy prostą grę. $v(S) = 1$ oznacza, że można uformować koalicję S , która może rządzić (wygrywa wybory). Zakładamy, że:

- $v(P) = 1$
- $v(\emptyset) = 0$
- v jest funkcją niemalejącą.
- Dla $S \subseteq P$, jeśli $v(S) = 1$, to $v(P \setminus S) = 0$.

Indeksem siły Shapleya-Shubika i -tego gracza $Sh(i)$ jest wartość Shapleya i -tego gracza w takiej grze.

Niech $S \subseteq P$. Określamy $K(S) = \{i \in S : v(S) = 1, v(S \setminus \{i\}) = 0\}$ — zbiór kluczowych koalicjantów w koalicji S .

Indeksem Banzhafa gracza i nazywamy proporcję:

$$B(i) = \frac{|\{S \subseteq P : i \in K(S)\}|}{\sum_{j \in P} |\{S \subseteq P : j \in K(S)\}|}.$$

Uwaga 92. W grach prostych:

$$\sum_{i \in P} Sh(i) = \sum_{i \in P} B(i) = 1.$$

Uwaga 93. Przykład z fabrykami można uznać za przykład równoważny z formowaniem koalicji. Wobec tego wyliczyliśmy indeks Shapleya-Shubika już wcześniej.

Policzymy indeks Banzhafa. Mamy tylko 3 możliwe koalicje: LRM_1 , LRM_2 i LRM_1M_2 . L oraz R są kluczowe we wszystkich koalicjach, natomiast M_1 i M_2 tylko w dwóch pierwszych (kluczowi gracze są podkreśleni).

Oznacza to, że: $B(L) = B(R) = \frac{3}{8} = 0.375$ oraz $B(M_1) = B(M_2) = \frac{1}{8} = 0.125$.

Widać, że wartości indeksów różnią się istotnie.

13 Wykład 12

13.1 Twierdzenie Arrowa

Uwaga 94 (Paradoks de Condorceta (XVIII w.)). Wyobraźmy sobie, że mamy 3 kandydatów A, B, C oraz 3 wyborców z preferencjami: $A <_1 B <_1 C$, $B <_2 C <_2 A$ oraz $C <_3 A <_3 B$.

Chcą przegłosować najlepszego kandydata większością głosów. Jeśli każdy zagłosuje na najlepszego kandydata podług swojej preferencji, to mamy impas. Powiedzmy, że 1. wyborca dowiedział się, że 3. wyborca zagłosuje na kandydata B i przekazał tę informację 2. wyborcy, jak również to, że nie zagłosuje na A . W ten sposób dogadali się, że obaj zagłosują na kandydata C tak, jak chce gracz pierwszy.

Gracz 2. wybiera „mniejsze zło”, bo ktoś zasugerował mu, że jest tylko 2 potencjalnych kandydatów.

Przykład 39 (Kompas polityczny). Przykład z OmatKo!!!

Definicja 52. Niech L będzie zbiorem liniowych porządków na zbiorze wszystkich możliwych rozstrzygnięć A . **Funkcja społecznej preferencji** (w skrócie: **FSP**) to pewna ustalona funkcja $F : L^P \rightarrow L$.

- Mówimy, że **FSP jest jednomyślna**, jeśli dla $< \in L$, $F(<^P) = <$.
- Mówimy, że gracz $i \in [n]$ jest **dyktatorem**, jeśli

$$(\forall < = (<_1, <_2, \dots, <_n) \in L^n) F(<) = <_i.$$

- **FSP jest niezależna względem nieistotnych alternatyw** (ma własność słabej optymalności Pareta, jeśli

$$(\forall a, b \in A)(\forall <_1, <_2, \dots, <_n, <'_1, <'_2, \dots, <'_n \in L)$$

$$(< = F(<_1, <_2, \dots, <_n) \wedge <' = F(<'_1, <'_2, \dots, <'_n) \wedge (\forall i \in P)(a <_i b \leftrightarrow a <'_i b)) \rightarrow (a < b \leftrightarrow a <' b).$$

Twierdzenie 13.1 (Arrow). Niech $|A| > 2$ i **FSP** będzie jednomyślna i niezależna względem nieistotnych alternatyw. Wtedy w grze istnieje dyktator.

Uwaga 95. Istnieją gry bez dyktatora, które są jednomyślne albo niezależne względem nieistotnych alternatyw.

13.2 Gry na sieciach

Uwaga 96. Przez $\mathbb{R}_+$ będziemy oznaczali półprostą $[0, \infty)$.

Definicja 53. Gra na sieciach (nieatomowa samolubna gra w routing) zadana jest przez krotkę $(G = (V, E), c : E \rightarrow \mathbb{R}_+, P, T, Q = \{(s_i, t_i, d_i) : i \in T\})$, gdzie:

1. G jest grafem skierowanym. V symbolizują punkty, między którymi przesyłane są ładunki (np. routery i dane), a E symbolizują drogi, po których przesyłane są ładunki.
2. Dla $e \in E$, $c_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest niemalejącą i ciągłą funkcją kosztu, która wielkości ładunku przesyłanego przez e przypisuje czas jego przesyłu przez tę krawędź.
3. P jest zbiorem graczy. T jest zbiorem typów. Każdy gracz ma jeden typ. Do jednego typu może przynależeć kilku graczy.
4. Dla każdego typu i mamy określone:
 - $s_i \in V$ — źródło
 - $t_i \in V$ — ujście
 - $d_i > 0$ — ilość przesyłanego ładunku z s_i do t_i .

d_i jest sumarycznym ładunkiem wysyłanym przez graczy, którzy są typu i .

Uwaga 97. Funkcja kosztu względem ładunku może być uznawana za funkcję opóźnienia względem przeciążenia.

Definicja 54 (Równowaga Wardropa). Niech Π będzie zbiorem wszystkich ścieżek (skierowanych) w G (można założyć, że ścieżki są podzbiorami krawędzi, a nawet, że ścieżki nie zawierają cykli). Dla $p \in \Pi$, to piszemy, że $p \sim (s, t)$, jeśli s jest źródłem p , a t jest jej ujściem.

Funkcję $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}_+$ nazywamy przepływem (bądź rozwiązaniem). Przepływ nazywamy dopuszczalnym, jeśli

$$(\forall i \in T) \sum_{p \sim (s_i, t_i)} f(p) = d_i.$$

Ponadto, dla zadanego dopuszczalnego przepływu f , dla każdej krawędzi $e \in E$, określamy $f_e = \sum_{p \ni e} f(p)$.

Dla $p \in \Pi$, określamy koszt ścieżki p jako $c_p(f) = \sum_{e \in p} c_e(f_e)$.

Rozwiązanie dopuszczalne f nazywamy równowagą (samolubną) Wardropa w grze, jeśli

$$(\forall i \in T) \left(\forall p, q \in \Pi \right) (p, q \sim (s_i, t_i)) \rightarrow (f(p) > 0 \leftrightarrow c_p(f) \leq c_q(f)).$$

Uwaga 98. W równowadze Wardropa wybierane są jedynie ścieżki, które gwarantują najkrótszy czas przesyłu.

Powyższy warunek przypomina twierdzenie o równości wypłat dla równowagi Nasha w grach w postaci strategicznej. Wobec tego, żaden z graczy nie będzie chciał odstąpić od ścieżki o najmniejszym koszcie.

Uwaga 99. W grach nieatomowych na sieciach, należy wyobrazić sobie, że graczy każdego typu jest bardzo dużo, przez co mogą zachowywać się samolubnie. Równowaga Wardropa wiąże się z optymalizacją $\sum_{e \in p} c_e(f_e)$, gdzie p jest ścieżką wybraną przez pojedynczego gracza. Taki gracz dąży do wybrania najtańszej dla niego ścieżki.

Przykład 40. Paradoks Braessa (z ćw.)

Twierdzenie 13.2. Równowaga Wardropa zawsze istnieje i jest unikalna.

Twierdzenie 13.3. Rozważmy grę (G, c, P, T, Q) . Niech dla wszystkich $e \in E$, g_e będzie różniczkowalna i wypukła. Niech $G(f) = \sum_{e \in E} g_e(f_e)$ będzie kosztem przepływu f . Rozwiązanie f minimalizuje G wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f(p) > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} g'_e(f_e) \leq \sum_{e \in q} g'_e(f_e) \right).$$

Wniosek 1. Jeśli c_e jest różniczkowalna i wypukła, a $C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e)$ jest kosztem przepływu f , to rozwiązanie f minimalizuje C wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f(p) > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} c'_e(f_e) \leq \sum_{e \in q} c'_e(f_e) \right).$$

Twierdzenie 13.4. Rozwiązanie dopuszczalne f jest równowagą Wardropa wtedy i tylko wtedy, gdy minimalizuje funkcję potencjału:

$$\varphi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x) dx.$$

Dowód. Niech $\varphi_e(x) = \int_0^x c_e(\xi) d\xi$. Wtedy $\varphi(f) = \sum_{e \in E} \varphi_e(f_e)$ oraz $\varphi'_e(x) = c_e(x)$ jest niemalejąca. Wobec tego, φ_e jest wypukła, czyli z poprz. tw., f minimalizuje φ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f(p) > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} c_e(f_e) \leq \sum_{e \in q} c_e(f_e) \right),$$

czyli f jest równowagą. □

Uwaga 100. Można rozważać inne miary i je optymalizować, np. maksimum czasów przesyłu, czy suma opóźnień przesyłu przez wszystkie krawędzie:

$$c(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) \cdot f_e = \sum_{p \in \Pi} c_p(f) \cdot f(p).$$

Twierdzenie 13.5. Niech c_e będzie różniczkowalne dla wszystkich $e \in E$ oraz $xc_e(x)$ będzie funkcją wypukłą. Wtedy f minimalizuje c , jeśli

$$(\forall i \in T) (\forall p, q \sim (s_i, t_i)) f(p) > 0 \rightarrow \left(\sum_{e \in p} (c_e(f_e) + f_e c'_e(f_e)) \leq \sum_{e \in q} (c_e(f_e) + f_e c'_e(f_e)) \right).$$

Uwaga 101. f minimalizuje c , gdy jest równowagą Wardropa dla zmienionej funkcji kosztu krawędziowego $c_e^*(x) = c_e(x) + xc'_e(x)$.

Definicja 55. Przepływ dopuszczalny f , który minimalizuje $c(f)$, nazywamy **równowagą (społeczną) Wardropa na grafie** (albo **przepływem optymalnym w sensie Wardropa**).

Uwaga 102. Optimum Wardropa minimalizuje średni koszt przesyłu w całej sieci.

14 Wykład 13

Przykład 41 (Przykład Pigou). Mamy graf skierowany od s do t , z ładunkiem d , który składa się z 2 dróg: 1. o koszcie $c_{e_1}(x) = ax$, gdzie $a > 0$, a druga — $c_{e_2}(x) \equiv 1$. Mamy dwie możliwe równowagi: $f_1^*(p) = d \cdot [p = \{e_1\}]$, jeśli $a < \frac{1}{d}$, a w przeciwnym razie:

$$f_2^*(p) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{jeśli } p = \{e_1\} \\ d - \frac{1}{a} & \text{jeśli } p = \{e_2\} \end{cases}.$$

Rozważmy teraz zmienioną funkcję kosztu: $c_{e_1}^*(x) = c_{e_1}(x) + xc_{e_1}'(x) = ax + x \cdot a = 2ax$ oraz $c_{e_2}^*(x) = c_{e_2}(x) + xc_{e_2}'(x) = 1 + x \cdot 0 = 1$. W takiej grze równowaga Wardropa f_{opt} jest analogiczna, tyle, że ze stałą $a' = 2a$ zamiast a .

Uwaga 103. Zauważmy, że zarówno $\varphi_{e_1}(x) = \int_0^x c_{e_1}^*(\xi) d\xi = ax^2$, jak i $\varphi_{e_2}(x) = \int_0^x c_{e_2}^*(\xi) d\xi = x$, dla obu krawędzi, są funkcjami różniczkowalnymi, niemalejącymi i wypukłymi.

Uwaga 104. Chcieli byśmy rozważać jak bardzo może różnić się równowaga Wardropa względem rozwiązania optymalnego w danej grze.

Definicja 56. Ceną anarchii nazywamy $\max_{d \in (0, \infty)^T} \frac{c(f^*)}{c(f_{\text{opt}})}$, gdzie f^* jest równowagą Wardropa, a f_{opt} jest optimum w sensie Wardropa.

Uwaga 105. Należy pamiętać, że w powyższym wzorze funkcja c jest zależna zawsze od pierwotnych funkcji kosztów krawędzi c_e !

Przykład 42 (Pigou, c.d.). $c(f_1^*) = dad = ad^2$, gdy $a \leq \frac{1}{d}$, $c(f_2^*) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{a} + (d - \frac{1}{a}) \cdot 1 = d$ w przeciwnym przypadku oraz $c(f_{\text{opt}}) = dad = ad^2$, gdy $a \leq \frac{1}{2d}$, a w przeciwnym przypadku $c(f_{\text{opt}}) = \frac{1}{2a} \cdot a \cdot \frac{1}{2a} + (d - \frac{1}{2a}) \cdot 1 = \frac{1}{4a} + d - \frac{1}{2a} = d - \frac{1}{4a}$. Wobec tego cena anarchii to:

$$\max \left\{ \max_{d > \frac{1}{a}} \frac{d}{d - \frac{1}{4a}}, \max_{d \in [\frac{1}{2a}, \frac{1}{a}]} \frac{ad^2}{d - \frac{1}{4a}}, \max_{d < \frac{1}{2a}} \frac{ad^2}{ad^2} \right\} = \frac{4}{3}.$$

Twierdzenie 14.1 (Roughgarden). Górnym ograniczeniem na cenę anarchii w dowolnej grze na sieciach, gdzie wszystkie c_e są różniczkowalne, a $xc_e(x)$ są wypukłe, jest cena anarchii sieci złożonej z dwóch krawędzi od s do t , gdzie $\hat{c}_{e_1} = \text{const}$, a $\hat{c}_{e_2} = c_e$, dla pewnego e z sieci wyjściowej.

Szkic dowodu. Rozważmy dowolną grę na G z równowagą f . Rozważmy graf $G + G'$, gdzie G' jest kopią G , a suma grafów sumuje krawędzie między odpowiadającymi wierzchołkami. Innymi słowy, między każdymi dwoma wierzchołkami, gdzie była krawędź e , teraz są jej dwie kopie. Niech $c_{e'}(x) = c_e(f_e)$, gdzie e' jest kopią e . Zauważmy, że dla gry na sieci $G + G'$, f jest wciąż równowagą. Teraz $c_e^*(x) = c_e(x) + xc_e'(x)$ oraz $c_{e'}^*(x) = c_{e'}(x) + 0 = c_e(f_e)$. Jeśli f^* byłoby rozwiązaniem dopuszczalnym, które na każdej krawędzi e ma przesył $c_e(f_e)$, to ma takie przesyły jak równowaga Wardropa. Ale taką równowagę otrzymaliśmy dla f . Wobec tego f^* jest rozwiązaniem optymalnym na $G + G'$. Można pokazać, że cena anarchii dla $G + G'$ nie spadnie poniżej ceny anarchii dla G , a że ta pierwsza jest ograniczona przez $\max_{d, e \in E} \frac{f_e c_e(f_e)}{f_e^* c_e(f_e^*) + f_{e'} c_e(f_e)}$. Zatem cenę anarchii dla wyjściowej gry można ograniczyć przez cenę anarchii dla gry między dwoma wierzchołkami, między którymi jest krawędź maksymalizująca powyższe wyrażenie. $\square$

Uwaga 106. Dla gier z liniowymi wypłatami, cena anarchii jest ograniczona przez $\frac{4}{3}$.

Uwaga 107. Istnieje wersja gry na grafach, gdzie każdy typ utożsamiany jest z innym graczem. Jest to tak zwana gra atomowa. Dla tego typu gier znanych jest więcej faktów.