

Dodatkowa lista zadań

Funkcje zespolone 2024/25

opracował: Dominik Bojko
KPI WIT Politechnika Wrocławska

20 listopada 2024

Zadanie 1. Czy funkcję $\frac{e^z}{z}$ można rozwinąć w szereg Maclaurina? A funkcję $\frac{e^z-1}{z}$? Jeśli którąś się da, to rozwiń. Czy $\frac{e^z}{z}$ można rozwinąć w szereg Taylora w $z = 1$?

Zadanie 2. Narysuj na płaszczyźnie zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |(z+1)^3 - 1 - i| = |(z+1)^3 + 1 + i|\}$.

Zadanie 3. Kiedy $\frac{z+1}{z-1}$ jest liczbą rzeczywistą, a kiedy urojoną?

Zadanie 4. Niech $|z| = 1$ i $z \neq a$. Ile wynosi $\left| \frac{z-a}{az-1} \right|$?

Zadanie 5. Narysuj zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq |2z-1|\}$.

Zadanie 6. Niech $a, c > 0$ oraz $b \in \mathbb{C}$.

1. Jak wygląda zbiór $\{z \in \mathbb{C} : bz + \bar{b}z + c = 0, b \neq 0\}$?
2. Jak wygląda zbiór $\{z \in \mathbb{C} : az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0, b\bar{b} - ac \geq 0\}$?

Zadanie 7. Pokazać, że obrazem półpłaszczyzny $\Im(z) > 0$ przez funkcję $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ jest płaszczyzną zespoloną z wyrzuceniem półprostych $(-\infty, -1]$ i $[1, \infty)$.

Zadanie 8. Rozważmy siatkę $G := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \in \mathbb{Z} \vee \Im(z) \in \mathbb{Z}\}$. Jak wyglądają obrazy G przez poszczególne funkcje:

1. $f(z) = z^2$?
2. $f(z) = z^3 + 1$?
3. $f(z) = e^z$?
4. $f(z) = \sin(z)$?

Zadanie 9. Niech $z = x + iy$. Przedstaw funkcję e^z w postaci $u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie u i v mają wartości rzeczywiste. Ile wynoszą pochodne cząstkowe pierwszego rzędu z funkcji u i v ?

Zadanie 10. Niech $f(z) = 1 + z + z^2$. Ile wynosi $\max\{|f(z)| : |z| \leq 1\}$?

Zadanie 11. Niech $|z_k| \leq 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Udowodnij, że

$$\left| 1 - \prod_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |1 - z_k|.$$

Zadanie 12. Rozważmy ciąg kwadratów jednostkowych $ABCD$, $BA'D'C$ i $A'B'C'D'$. Ile wynosi suma kątów $\angle BAC + \angle A'AD' + \angle B'AC'$?

Zadanie 13. Dla jakich $a \in \mathbb{C}$, podane ciągi są zbieżne? (a^n) , $\left(\frac{a^n}{n}\right)$, $\left(\frac{a^n}{a^n+1}\right)$ i $\left(\frac{a^n}{a^{2n}+1}\right)$.

Zadanie 14. Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$. Niech $f_{n+1}(z) = f(f_n(z))$, dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $f_0(z) = z$. Ile wynosi $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i)$?

Zadanie 15. Niech

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z^4|} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Pokaż, że

- (a) f — ciągła w 0,
- (b) f nie jest różniczkowalna w 0,
- (c) równania Cauchy'ego—Riemanna są spełnione,
- (d) pochodne cząstkowe nie są ciągłe.

Zadanie 16. Policz:

1.

$$\int_0 \pi \sin(1 + it) dt$$

2.

$$\int_{\Gamma} |e^z| \bar{z} dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest odcinkiem od } -i \text{ do } 1$$

3.

$$\int_{\Gamma} z - \bar{a} z dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest łukiem paraboli } \Im(z) = \Re(z)^2, \text{ od } 2 + 4i \text{ do } -1 + i$$

4.

$$\int_{\Gamma} \bar{z} \Re(z^2) dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest ujemnie skierowanym okręgiem } |z| = 3$$

5.

$$\int_{\Gamma} z^n dz, \text{ gdzie } 0 \text{ leży wewnątrz dodatnio zorientowanej krzywej zamkniętej } \Gamma, n \in \mathbb{Z}$$

6.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^n}{(1-z)^m} dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ to dodatnio zorientowany okrąg o środku w } 0 \text{ i promieniu } 1$$

7.

$$\int_{\Gamma} \frac{z^n}{(1-z)^m} dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ to odcinek od } 1 \text{ do } 0$$