

Lista zadań

Wybrane zagadnienia Algebry 2026

Dominik Bojko
KPI WIT PWr

2 marca 2026

1 Wstęp

Lab. 1. a) Narysuj rozwiązanie równania $x^2 + y^2 = 1$ w GeoGebry <https://www.geogebra.org/graphing>. Oznaczmy tę krzywą jako C . Jak powyższy wzór wiąże z jedynką trygonometryczną?

b) Jak wyglądają lokalne topologie punktów na krzywej C ?

Ćw. 1. To zadanie nawiązuje do treści poprz. zadania.

a) Wyznacz 2. punkt przecięcia C z prostą przechodzącą przez $(-1, 0)$, o współczynniku kierunkowym $t \in \mathbb{R}$. Oznaczmy ten punkt jako $p(t) = (x(t), y(t))$. Czym się różni obraz $C' = p[\mathbb{R}]$ od wyjściowego wykresu?

b) Wyznacz funkcję $p^{-1}(x, y)$.

c) (*) Ile wynosi $\frac{dx}{dt}$? Oblicz $\oint_C \frac{dx}{y}$, zamieniając x oraz y na parametr t . Możesz wspomóc się Wolframem Alpha <https://www.wolframalpha.com/>.

d) (*) Oblicz tę samą całkę, używając współrzędnych biegunowych.

Lab. 2. W tym zadaniu rysujemy krzywe korzystając z GeoGebry.

a) Jak wygląda wykres $9x^2 + 16y^2 = 25$? Jakiej długości są półosie krzywej? Jak ten wzór wiąże się z jedynką trygonometryczną?

b) Zastosujmy podstawienie: $\tilde{x} = \sqrt{3}x + y$ oraz $\tilde{y} = -x + \sqrt{3}y$. Narysuj wykres dla równania z podp. a) po podstawieniu (we współrzędnych $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$).

c) Wyznacz i dorysuj na wcześniejszym wykresie $x(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ i $y(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$.

d) Zapisz powyższe podstawienie w postaci macierzowej. Jaki wyznacznik ma macierz tego przekształcenia? Wyznacz macierz odwrotną dla tego przekształcenia. Jakiej długości są półosie krzywej po podstawieniu?

Lab. 3. a) Narysuj wykres funkcji wielomianowej $f(x, y) = x^2 - y^2$ przy użyciu Wolframa Alpha. Możesz użyć polecenia `Plot3D`.

b) Niech oś wartości funkcji f będzie oznaczona przez z . Jak wyglądają cięcia wykresu funkcji $f(x, y)$ płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn Oxz oraz Oyz ?

c) Narysuj wykresy rozwiązań równań poziomich $f(x, y) = c$, gdzie $c \in \{-1, 0, 1\}$, przy użyciu GeoGebry.

d) Dla równania $f(x, y) = 1$, zastosuj podstawienie $\tilde{x} + \tilde{y} = 2y$ oraz $\tilde{x} - \tilde{y} = 2x$. Zapisz to podstawienie w postaci macierzowej. Jakie to przekształcenie?

e) Jakie równanie otrzymamy po podstawieniu? Narysuj wykres rozwiązań tego równania.

f) Jak to zadanie wiąże się z jedynką hiperboliczną?

- g) Określamy funkcję $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y)$. Narysuj wykres funkcji $\tilde{f}$ (we współrzędnych $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$).
- h) Niech oś wartości funkcji $\tilde{f}$ będzie oznaczona przez $\tilde{z}$. Jak wyglądają cięcia wykresu funkcji $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$ płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn $O\tilde{x}\tilde{z}$ oraz $O\tilde{y}\tilde{z}$?
- i) Jak można budować struktury dachów takich jak: stacja kolejowa na warszawskiej Ochocie, czy welodrom w Londynie?

Ćw. 2. Niech krzywa C będzie określona równaniem: $x^2 - y^2 = 1$.

- a) Wyznacz 2. punkt przecięcia krzywej C z prostą przechodzącą przez $(-1, 0)$, o współczynniku kierunkowym $t \in \mathbb{R}$. Oznaczmy ten punkt jako $p(t) = (x(t), y(t))$. Czym się różni obraz $C' = p[\mathbb{R}]$ od wyjściowego wykresu?
- b) Jak wyglądają lokalne topologie punktów na krzywej C ?

Lab. 4. a) Przy użyciu GeoGebry, narysuj 3 lemniskaty, które są rozwiązaniami równań: $x^3 + x + 10 = y^2$, $x^3 - 3x + 2 = y^2$ oraz $x^3 - 4x = y^2$.

- b) Sprawdź, że $(-2, 0)$ spełnia wszystkie powyższe równania.
- c) Jakie są pierwiastki zespolone lewych stron powyższych równań (jako wielomianów zmiennej x)? Sprawdź wyniki przy pomocy polecenia `Factor` w Wolframie Alpha.

Ćw. 3. To zadanie nawiązuje do treści poprz. zad.

- a) Rozważmy proste k_t postaci $y = t(x + 2)$ (sparametryzowane t). Niech $(x(t), y(t))$ oraz $(u(t), v(t))$ będą punktami (różnymi od $(-2, 0)$) przecięcia danej lemniskaty z k_t . Jeśli jest 1 taki punkt, to zakładamy, że $x = u$ i $y = v$. Jaka jest zależność między $(x(t), y(t))$ oraz $(u(t), v(t))$ dla każdej z lemniskat?
- b) Jak można wykorzystać powyższe spostrzeżenie do zaszyfrowania punktów z tych krzywych, zakładając, że $(-2, 0)$ jest kluczem prywatnym?
- c) Jak wyglądają lokalne topologie punktów na tych krzywych?
- d) (*) Wyraż $\frac{dx}{y}$ przy pomocy dy oraz x , gdy $y \rightarrow 0$. Dla której z krzywych pojawia się problem?

Ćw. 4. Na zbiorze $\mathbb{N}^k$ określamy porządek produktowy:

$$(x_1, \dots, x_k) \leq (y_1, \dots, y_k) \iff \bigwedge_{i=1}^k (x_i \leq y_i).$$

- a) Ile elementów minimalnych ma zbiór $A = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : n \cdot m \geq 11\}$?
- b) Ile elementów minimalnych ma zbiór $B = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : (n - 10)^2 + (m - 10)^2 \leq 25\}$?

Lab. 5. Zaproponuj algorytm, który wyznacza elementy minimalne w porządku z poprz. zad.

Ćw. 5. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- a) Oblicz A^2 . Czy macierz A jest odwracalna?
- b) Czy macierze rzeczywiste, odwracalne 2×2 tworzą pierścień przemienności? A czy tworzą ciało?

Ćw. 6. Rozważmy zbiór macierzy rzeczywistych trójkątnych górnych $\mathcal{T}_2$, o wymiarach 2×2 .

- a) Uzasadnij, że $\mathcal{T}_2$, z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia macierzy, tworzy pierścień.
- b) Niech $\mathcal{D} = \{a + b\varepsilon : a, b \in \mathbb{R}\}$ będzie pierścieniem liczb dualnych (z przemiennymi dodawaniem i mnożeniem odziedziczonymi z $\mathbb{R}$), gdzie $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ takie, że $\varepsilon^2 = 0$. Pokaż, że pierścień liczb dualnych można zanurzyć izomorficznie w $\mathcal{T}_2$ (tzn. istnieje takie $\varphi : \mathcal{D} \xrightarrow{1-1} \mathcal{T}_2$, że $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ oraz $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$).

Ćw. 7. Rozważmy wielomian $w \in \mathcal{D}[x]$ o współczynnikach dualnych.

- Oblicz $(a + b\varepsilon)^n$ w pierścieniu liczb dualnych dla $n \in \mathbb{N}$.
- Formalna pochodna wielomianu $v \in \mathbb{R}[x]$ pokrywa się z pochodną odpowiadającej funkcji wielomianej $v(x)$.
Jak analogicznie można zdefiniować (formalną) pochodną wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i\varepsilon)x^i$?
- Wyraź $w(a + b\varepsilon)$ w języku a, b, w oraz w' .

Ćw. 8. a) Udowodnij, że jedynymi elementami odwracalnymi w pierścieniu liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ są 1 i -1 .

- Znajdź 4 elementy odwracalne w pierścieniu Gaussa $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ i pokaż, że nie ma ich więcej.
- Znajdź elementy odwracalne w pierścieniach wielomianów: $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{R}[x, y]$ (tj. wielomianów rzeczywistych dwóch zmiennych).

Ćw. 9. Niech $\mathcal{R} = (X, +, \cdot, 0, 1)$ będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

- $\mathcal{I} \in \text{ID}(\mathcal{R})$ (tzn. $\mathcal{I}$ jest ideałem pierścienia $\mathcal{R}$),
- $\mathcal{R} \cdot (\mathcal{I} - \mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$.

Ćw. 10. (*, problem Steinhausa) Rozważmy pierścień $\mathbb{Z}_{12}$.

Znajdź taki zbiór $A \subset \mathbb{Z}_{12}$, że $A -_{12} A \neq \mathbb{Z}_{12}$, ale $A +_{12} A = \mathbb{Z}_{12}$.

Skonstruuj taki zbiór $B \subset \mathbb{Z}$, że $B - B \neq \mathbb{Z}$, ale $B + B = \mathbb{Z}$.

Definicja. Niech $(X, +, \cdot, 0)$ będzie pierścieniem, a $A \subseteq X$. Określamy

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \cdot a_i : n \in \mathbb{N}, k_i \in X, a_i \in A \right\}.$$

Ćw. 11. Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem, a A jego podzbiorem. Pokaż, że $\langle A \rangle \in \text{ID}(\mathcal{R})$, a w dodatku, że to najmniejszy taki ideał zawierający A .

Ćw. 12. Opisz wszystkie ideały w pierścieniu $\mathbb{Z}$, tj. $\text{ID}(\mathbb{Z})$. Dla każdego $\mathcal{I} \in \text{ID}(\mathbb{Z})$, opisz, z czym jest izomorficzny pierścień ilorazowy $\mathbb{Z}/\mathcal{I}$.

Ćw. 13. Uzasadnij, że $N(k) = |k|$ jest normą w dziedzinie całkowitości $\mathbb{Z}$. Czy $\tilde{N}(k) = k^2$ też jest normą?

Ćw. 14. Uzasadnij, że $N(a + bi) = a^2 + b^2$ jest normą w pierścieniu Gaussa $\mathbb{Z}[i]$.

Ćw. 15. (*) Niech $\mathcal{R} = (X, +, \cdot, 0)$ będzie dziedziną całkowitości oraz niech $M : X \rightarrow \mathbb{N}$, że

$$M(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad (\forall a, b \in X) (b \neq 0) \rightarrow [(\exists q, r \in X) a = q \cdot b + r \wedge (r = 0 \vee M(r) < M(b))]. \quad (1)$$

Pokaż, że wtedy istnieje $N : X \rightarrow \mathbb{N}$, że zachodzi (1) dla $M \leftarrow N$, a ponadto:

$$(\forall a, b \in X) (b \neq 0) \rightarrow N(a) \leq N(a \cdot b).$$

Lab. 6. a) Napisz pseudokod dla dzielenia z resztą w $\mathbb{Z}[i]$, tzn. taki algorytm, który dla danych $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, gdzie $y \neq 0$, zwraca parę $(q, r) \in (\mathbb{Z}[i])^2$, że $x = qy + r$ oraz $N(r) < N(y)$.

b) Napisz pseudokod do wyznaczania NWD dwóch liczb w $\mathbb{Z}[i]$.

c) Napisz pseudokod do wyznaczania NWW dwóch liczb w $\mathbb{Z}[i]$.

d) Znajdź $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, że $\langle 3 + 4i, 1 + 3i \rangle = \langle a \rangle$ oraz $\langle 3 + 4i \rangle \cap \langle 1 + 3i \rangle = \langle b \rangle$.

e) Sprawdź jakoś powyższy podpunkt w Wolframie Alpha. Czy jest różnica, gdy do zapisu jednostki urojonej zamiast „i” będziemy używali „I”?

2 Wielomiany

Ćw. 16. a) Pokaż, że $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 \rangle$ jest izomorficzny z liczbami dualnymi $\mathcal{D}$.

b) Pokaż, że $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ jest izomorficzny z liczbami zespolonymi $\mathbb{C}$.

c) Pokaż, że $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$ jest izomorficzny z liczbami podwójnymi:

$$\mathcal{P} = \{a + bj : a, b \in \mathbb{R}\}; \quad j \notin \mathbb{R}, \quad j^2 = 1.$$

Uwaga: Wszystkie podpunkty można udowodnić za jednym zamachem.

Lab. 7. W tym zadaniu polecenia należy sprawdzać w Wolframie Alpha.

a) Sprawdź co robi `ExtendedGCD[39,15]`. Zinterpretuj otrzymany wynik.

b) Czym różnią się polecenia: `PolynomialQuotient[w(x),v(x),x]`, `PolynomialRemainder[w(x),v(x),x]`, `PolynomialQuotientRemainder[w(x),v(x),x]` i `PolynomialMod[w(x),v(x)]`? Przetestuj je wszystkie dla różnych argumentów.

Te polecenia, które dają „te same wyniki” przetestuj także dla wielomianu stałego $v(x) \equiv 2$ i różnych $w(x)$.

Definicja. Niech κ będzie ciałem. Dla $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \kappa[x]$ określamy dominujący jednomian (tzw. „leading term”) jako $\text{LT}(f) = a_n x^n$.

Ćw. 17. a) Ile wynosi $\text{LT}(f) \cdot \text{LT}(g)$?

b) Jak wyznaczyć $\text{LT}(f) \pm \text{LT}(g)$?

c) Jak policzyć $\text{LT}(f)/\text{LT}(g)$ w $\mathbb{Z}[x]$?

Lab. 8. a) Napisz pseudokod, dla dzielenia z resztą w $\mathbb{R}[x]$.

b) Napisz pseudokod do wyznaczania NWD dwóch wielomianów w $\mathbb{R}[x]$.

c) Napisz pseudokod do wyznaczania NWW dwóch wielomianów w $\mathbb{R}[x]$.

d) Przetestuj działanie `PolynomialGCD` oraz `PolynomialLCM` w Wolframie Alpha.

e) Znajdź $a, b \in \mathbb{R}[x]$, że $\langle 1 + x^2, 1 + 2x + x^2 \rangle = \langle a(x) \rangle$ oraz $\langle 1 + x^2 \rangle \cap \langle 1 + 2x + x^2 \rangle = \langle b(x) \rangle$.

f) Wykorzystaj polecenie `PolynomialExtendedGCD` do sprawdzenia poprz. punktu.

g) Napisz pseudokod własnej wersji powyższego polecenia, tj. taki algorytm, który pobiera $f, g \in \mathbb{R}[x]$ i zwraca $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$, że $\text{NWD}(f, g) = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$. Jak zmieniłby się algorytm, gdyby ciało $\mathbb{R}$ zastąpić dowolnym ciałem κ ?

Ćw. 18. Niech $(X, +, \cdot, 0)$ będzie pierścieniem przemiennym i niech $a, b, r, q \in X$ będą takie, że $a = q \cdot b + r$. Pokaż, że $\langle a, b \rangle = \langle b, r \rangle$.

Lab. 9. a) Oblicz dowolnym narzędziem $\text{NWD}(x^4 + x^2 + 1, x^4 - x^2 - 2x - 1, x^3 - 1)$.

b) Oblicz dowolnym narzędziem $\text{NWD}(x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2)$.

c) Czy wielomian $x^2 - 2$ należy do ideału $\langle x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2 \rangle$?

Lab. 10. Znajdź pierwiastki $f(x) = x^5 - x$, gdzie $f \in \mathbb{Z}_5[x]$. Użyj polecenia `Factor[f(x), Modulus -> 5]` w Wolfram Alpha, żeby sprawdzić wynik. Czy $f(x) \equiv 0$?

3 Rozmaitości algebraiczne

Definicja. Niech κ będzie ciałem. Niech $f_1, \dots, f_k \in \kappa[x_1, \dots, x_n]$. Zbiór:

$$V(f_1, \dots, f_k) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \kappa^n : (\forall i \in \{1, \dots, k\}) f_i(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

nazywamy rozmaitością algebraiczną generowaną przez wielomiany $f_1, \dots, f_k$ (w przestrzeni afinicznej κ^n).

Ćw. 19. Znajdź rozmaitości algebraiczne w odpowiednich przestrzeniach:

- a) $V(x^2 + y^2 - 9)$; w $\mathbb{R}^2$
- b) $V(xy)$; w $\mathbb{R}^2$
- c) $V(x^2 - y^2)$; w $\mathbb{R}^2$
- d) $V(x - y^2)$; w $\mathbb{R}^2$
- e) $V(2x^2 + y^2 - 3)$; w $\mathbb{R}^2$
- f) $V(43x^2 + 14xy + 57y^2 - 400, \sqrt{3}x - y)$; w $\mathbb{R}^2$
- g) $V(z - x^2 - y^2)$; w $\mathbb{R}^3$
- h) $V(z^2 - x^2 - y^2)$; w $\mathbb{R}^3$
- i) $V(z - x^2 + y^2)$; w $\mathbb{R}^3$
- j) $V(xz, yz)$; w $\mathbb{R}^3$

Lab. 11. Przedstaw graficznie rozmaitości z poprz. zadania. przy użyciu wybranego narzędzia.

Ćw. 20. Niech κ będzie ciałem, a $n \geq 1$. Pokaż, że rodzina rozmaitości algebraicznych nad κ^n jest domknięta na skończone sumy oraz skończone przekroje. Czy jest domknięta na operację dopełnienia?

Lab. 12. Quadrifolium (albo krzywą czterolistną) nazywamy krzywą Q daną równaniem

$$r(\theta) = \sin(2\theta), \quad \theta \in [0, \pi),$$

we współrzędnych biegunowych.

- a) Narysuj tę krzywą przy pomocy Wolframa Alpha. Możesz się posłużyć poleceniem

$$\text{ParametricPlot}[\{x(\theta), y(\theta)\}, \{\theta, \text{start}, \text{stop}\}].$$

- b) Narysuj tę samą krzywą przy pomocy GeoGebry. Możesz posłużyć się poleceniem

$$\text{Krzywa}(x(\theta), y(\theta), \theta, \text{start}, \text{stop}).$$

Zmień opcje siatki na współrzędne biegunowe i zagęść linie kątów co $\frac{\pi}{12}$ radianów.

- c) Narysuj podobne wykresy dla $\tilde{r}(\theta) = \sqrt{r(\theta)}$ oraz $\bar{r}(\theta) = \sqrt{|r(\theta)|}$. Czym się różnią od wyjściowego? Dlaczego?

Ćw. 21. a) Jakie są punkty przecięcia Quadrifolium Q z poprz. zadania z krzywą $x^2 + y^2 = 1$? Oznaczmy zbiór tych punktów przez X .

- b) Znajdź wielomian $w(x, y)$, że $r[\mathbb{R}] = V(w)$.

- c) Znajdź takie $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$, że $V(f_1, f_2) = X$, oraz, żeby $f_1(x, y) = 0$ opisywało Q .

Ćw. 22. Które z podanych podzbiorów $\mathbb{R}^2$ są rozmaitościami algebraicznymi i dlaczego?

- a) skończony podzbiór $\mathbb{R}^2$,
- b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- c) $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

c.d.n.; Powodzenia, DB