Wielomiany, a funkcje wielomianowe

Dominik Bojko

10 czerwca 2014

Funkcja

Definicja (Funkcja)

Niech $A \subset \mathbb{R}$. Funkcją rzeczywistą f, określoną na A, nazywamy zbiór par uporządkowanych (x, y) takich, że jeśli $x \in A$, to istnieje dokładnie jedno $y \in \mathbb{R}$, że para $(x, y) \in f$ (takie y zapisujemy jako $f(x)$), a jeśli $x \notin A$, to dla żadnego y, para $(x, y) \notin f$.
Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji f. Zapisujemy również $f : A \to \mathbb{R}$
Zbiór wszystich takich funkcji zapisujemy jako $\mathbb{R}^A$

W ogólnej definicji funkcji wystarczy zamienić zbiór A na dowolny zbiór X, a zbiór $\mathbb{R}$ na Y.
Funkcje rzeczywiste (nie tylko) utożsamia się z reguły z wykresem tej funkcji.

Rzeczywiste funkcje wielomianowe

Definicja (Rzeczywista funkcja wielomianowa)

Niech $n \in \mathbb{N}_0 (= \{0, 1, 2, 3, ...\})$. Niech $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wtedy funkcję $f : A \to \mathbb{R}$, określoną wzorem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

nazywamy rzeczywistą funkcją wielomianową n-tego stopnia(o ile $a_n \neq 0$).
Zbiór rzeczywistych funkcji wielomianowych oznaczamy $\mathbb{R}[x]$.

Rzeczywiste funkcje wielomianowe

Definicja (Rzeczywista funkcja wielomianowa)

Niech $n \in \mathbb{N}_0 (= \{0, 1, 2, 3, ...\})$. *Niech* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Niech* $A \subset \mathbb{R}$. *Wtedy funkcję* $f : A \to \mathbb{R}$*, określoną wzorem*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

nazywamy rzeczywistą funkcją wielomianową n-tego stopnia(o ile $a_n \neq 0$*).*
Zbiór rzeczywistych funkcji wielomianowych oznaczamy $\mathbb{R}[x]$.

- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ - funkcja tożsamościowa (Oznaczenie: $Id_{\mathbb{R}}(x)$)

Rzeczywiste funkcje wielomianowe

Definicja (Rzeczywista funkcja wielomianowa)

Niech $n \in \mathbb{N}_0 (= \{0, 1, 2, 3, ...\})$. *Niech* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Niech* $A \subset \mathbb{R}$. *Wtedy funkcję* $f : A \to \mathbb{R}$*, określoną wzorem*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

nazywamy rzeczywistą funkcją wielomianową n-tego stopnia(o ile $a_n \neq 0$*).*
Zbiór rzeczywistych funkcji wielomianowych oznaczamy $\mathbb{R}[x]$.

- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ - funkcja tożsamościowa (Oznaczenie: $Id_{\mathbb{R}}(x)$)
- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ - funkcja liniowa

Rzeczywiste funkcje wielomianowe

Definicja (Rzeczywista funkcja wielomianowa)

Niech $n \in \mathbb{N}_0 (= \{0, 1, 2, 3, ...\})$. *Niech* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Niech* $A \subset \mathbb{R}$. *Wtedy funkcję* $f : A \to \mathbb{R}$, *określoną wzorem*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

nazywamy rzeczywistą funkcją wielomianową n-tego stopnia(o ile $a_n \neq 0$*).*
Zbiór rzeczywistych funkcji wielomianowych oznaczamy $\mathbb{R}[x]$.

- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ - funkcja tożsamościowa (Oznaczenie: $Id_{\mathbb{R}}(x)$)
- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ - funkcja liniowa
- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ - funkcja kwadratowa

Rzeczywiste funkcje wielomianowe

Definicja (Rzeczywista funkcja wielomianowa)

Niech $n \in \mathbb{N}_0 (= \{0, 1, 2, 3, ...\})$. *Niech* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Niech* $A \subset \mathbb{R}$. *Wtedy funkcję* $f : A \to \mathbb{R}$, *określoną wzorem*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

nazywamy rzeczywistą funkcją wielomianową n-tego stopnia(o ile $a_n \neq 0$*).*
Zbiór rzeczywistych funkcji wielomianowych oznaczamy $\mathbb{R}[x]$.

- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ - funkcja tożsamościowa (Oznaczenie: $Id_{\mathbb{R}}(x)$)
- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ - funkcja liniowa
- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ - funkcja kwadratowa
- $A = \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ - funkcja dwukwadratowa

Złożenie funkcji

Definicja (Złożenie funkcji)

Jeśli $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$*, to złożeniem funkcji* g *i* f *nazywamy funkcję* $h : X \to Z$*, zdefiniowaną wzorem:* $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Złożenie funkcji

Definicja (Złożenie funkcji)

Jeśli $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$*, to złożeniem funkcji* g *i* f *nazywamy funkcję* $h : X \to Z$*, zdefiniowaną wzorem:* $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- Zauważmy, że jeśli mamy dowolną funkcję rzeczywistą, to $f = f \circ Id_{\mathbb{R}}$.
  Innymi słowy $f(x) = f(Id_{\mathbb{R}}(x))$.

Złożenie funkcji

Definicja (Złożenie funkcji)

Jeśli $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$, *to złożeniem funkcji* g *i* f *nazywamy funkcję* $h : X \to Z$, *zdefiniowaną wzorem:* $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- Zauważmy, że jeśli mamy dowolną funkcję rzeczywistą, to $f = f \circ Id_{\mathbb{R}}$.
  Innymi słowy $f(x) = f(Id_{\mathbb{R}}(x))$.
- W szczególności każda funkcja wielomianowa jest złożeniem funkcji wielomianowych.

Złożenie funkcji

Definicja (Złożenie funkcji)

Jeśli $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$*, to złożeniem funkcji* g *i* f *nazywamy funkcję* $h : X \to Z$*, zdefiniowaną wzorem:* $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

- Zauważmy, że jeśli mamy dowolną funkcję rzeczywistą, to $f = f \circ Id_{\mathbb{R}}$.
  Innymi słowy $f(x) = f(Id_{\mathbb{R}}(x))$.
- W szczególności każda funkcja wielomianowa jest złożeniem funkcji wielomianowych.
- Zauważmy również, że stałe a_i możemy także traktować jako wielomiany stałe.

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$
- Zauważmy teraz, że $x^0 = 1$ oraz $x^n = x^{n-1} \cdot x$ dla $n = 1, 2, 3, ...$.

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$
- Zauważmy teraz, że $x^0 = 1$ oraz $x^n = x^{n-1} \cdot x$ dla $n = 1, 2, 3, ...$.
- Każda funkcja wielomianowa to suma skończonej ilości iloczynów postaci $a_k \cdot x^k$.
  Będziemy zapisywali $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$
- Zauważmy teraz, że $x^0 = 1$ oraz $x^n = x^{n-1} \cdot x$ dla $n = 1, 2, 3, ...$
- Każda funkcja wielomianowa to suma skończonej ilości iloczynów postaci $a_k \cdot x^k$.
  Będziemy zapisywali $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.
- Łatwo teraz zauważyć, że do zdefiniowania funkcji wielomianowej potrzeba operacji dodawania i mnożenia oraz zmiennej x.

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$
- Zauważmy teraz, że $x^0 = 1$ oraz $x^n = x^{n-1} \cdot x$ dla $n = 1, 2, 3, ...$
- Każda funkcja wielomianowa to suma skończonej ilości iloczynów postaci $a_k \cdot x^k$.
  Będziemy zapisywali $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.
- Łatwo teraz zauważyć, że do zdefiniowania funkcji wielomianowej potrzeba operacji dodawania i mnożenia oraz zmiennej x.
- Jakie wartości przyjmuje funkcja wielomianowa?

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$
- Zauważmy teraz, że $x^0 = 1$ oraz $x^n = x^{n-1} \cdot x$ dla $n = 1, 2, 3, ...$
- Każda funkcja wielomianowa to suma skończonej ilości iloczynów postaci $a_k \cdot x^k$.
  Będziemy zapisywali $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.
- Łatwo teraz zauważyć, że do zdefiniowania funkcji wielomianowej potrzeba operacji dodawania i mnożenia oraz zmiennej x.
- Jakie wartości przyjmuje funkcja wielomianowa?
- Takie, jakie można otrzymać za pomocą działań dodawania oraz mnożenia zmiennej x ze zbioru A przez siebie oraz stałe a_i.

Czego użyliśmy do zdefiniowania funkcji wielomianowej?

- Dziedziny- pewnego zbioru A
- Pewnych stałych - $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a_0, a_1, ..., a_n$
- Zauważmy teraz, że $x^0 = 1$ oraz $x^n = x^{n-1} \cdot x$ dla $n = 1, 2, 3, ...$.
- Każda funkcja wielomianowa to suma skończonej ilości iloczynów postaci $a_k \cdot x^k$.
  Będziemy zapisywali $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.
- Łatwo teraz zauważyć, że do zdefiniowania funkcji wielomianowej potrzeba operacji dodawania i mnożenia oraz zmiennej x.
- Jakie wartości przyjmuje funkcja wielomianowa?
- Takie, jakie można otrzymać za pomocą działań dodawania oraz mnożenia zmiennej x ze zbioru A przez siebie oraz stałe a_i.
- To oznacza, że dobór dziedziny i zbioru, z którego możemy dobierać stałe determinuje nam zbiór możliwych wartości funkcji wielomianowej.

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

- Bierzemy dowolną kolekcję pewnych elementów A

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

- Bierzemy dowolną kolekcję pewnych elementów A
- Określmy jakieś działania $+$ i $\cdot$ (albo $\oplus$ i $\odot$) na A.

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

- Bierzemy dowolną kolekcję pewnych elementów A
- Określmy jakieś działania $+$ i $\cdot$ (albo $\oplus$ i $\odot$) na A.
- Weźmy wszystkie liczby naturalne oraz 0

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

- Bierzemy dowolną kolekcję pewnych elementów A
- Określmy jakieś działania $+$ i $\cdot$ (albo $\oplus$ i $\odot$) na A.
- Weźmy wszystkie liczby naturalne oraz 0
- Weźmy podklasę $B \subset A$, z której będziemy wybierać stałe a_i(Chcemy, aby zbiór B zawierał 0).

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

- Bierzemy dowolną kolekcję pewnych elementów A
- Określmy jakieś działania $+$ i $\cdot$ (albo $\oplus$ i $\odot$) na A.
- Weźmy wszystkie liczby naturalne oraz 0
- Weźmy podklasę $B \subset A$, z której będziemy wybierać stałe a_i(Chcemy, aby zbiór B zawierał 0).
- Niech teraz X będzie symbolem opisującym jakąś zmienną, pod którą będziemy podstawiać pewne elementy kolekcji A.

Inne spojrzenie na świat

Stwórzmy nową strukturę.

- Bierzemy dowolną kolekcję pewnych elementów A
- Określmy jakieś działania $+$ i $\cdot$ (albo $\oplus$ i $\odot$) na A.
- Weźmy wszystkie liczby naturalne oraz 0
- Weźmy podklasę $B \subset A$, z której będziemy wybierać stałe a_i(Chcemy, aby zbiór B zawierał 0).
- Niech teraz X będzie symbolem opisującym jakąś zmienną, pod którą będziemy podstawiać pewne elementy kolekcji A.

Definicja (Wielomian)

Wybieramy stałą $n \in \mathbb{N}_0$. Następnie wybieramy stałe $a_i \in B$, $i = 0, 1, 2, ..., n$. Formułę $a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + ... + a_1 \cdot X + a_0$ nazywamy wielomianem. Będziemy często oznaczać go jako $W(X)$.

- Uwaga: Wielomian to coś zupełnie innego, niż funkcja wielomianowa!

Przykłady

- Niech $A = \mathbb{R}, \; B = \mathbb{C}$. Niech działania $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami na $\mathbb{R}$. Niech $n = 3$. Wybieramy stałe
  $a_0 = 1, \; a_1 = 3, \; a_2 = -2, \; a_3 = 1$.
  Dla takich stałych, wielomian $W(X)$ wygląda następująco:
  $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.

Przykłady

- Niech $A = \mathbb{R}, \ B = \mathbb{C}$. Niech działania $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami na $\mathbb{R}$. Niech $n = 3$. Wybieramy stałe
  $a_0 = 1, \ a_1 = 3, \ a_2 = -2, \ a_3 = 1.$
  Dla takich stałych, wielomian $W(X)$ wygląda następująco:
  $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1.$
- W świecie A natomiast wielomian ten może wyglądać następująco:

Przykłady

- Niech $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$. Niech działania $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami na $\mathbb{R}$. Niech $n = 3$. Wybieramy stałe $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -2,\ a_3 = 1$.
  Dla takich stałych, wielomian $W(X)$ wygląda następująco: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- W świecie A natomiast wielomian ten może wyglądać następująco:
- $W(X)(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 + 6 + 1 = 7$.

Przykłady

- Niech $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$. Niech działania $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami na $\mathbb{R}$. Niech $n = 3$. Wybieramy stałe $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -2,\ a_3 = 1$.
  Dla takich stałych, wielomian $W(X)$ wygląda następująco: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- W świecie A natomiast wielomian ten może wyglądać następująco:
- $W(X)(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 + 6 + 1 = 7$.
- $W(X)(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 - 2 - 3 + 1 = -5$

Przykłady

- Niech $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$. Niech działania $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami na $\mathbb{R}$. Niech $n = 3$. Wybieramy stałe $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$.
  Dla takich stałych, wielomian $W(X)$ wygląda następująco: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- W świecie A natomiast wielomian ten może wyglądać następująco:
- $W(X)(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 + 6 + 1 = 7$.
- $W(X)(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 - 2 - 3 + 1 = -5$
- $W(X)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^3 - 2 \cdot \sqrt{2}^2 + 3 \cdot \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} - 4 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} - 3$

Przykłady

- Niech $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$. Niech działania $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami na $\mathbb{R}$. Niech $n = 3$. Wybieramy stałe
  $a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -2,\ a_3 = 1.$
  Dla takich stałych, wielomian $W(X)$ wygląda następująco:
  $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1.$
- W świecie A natomiast wielomian ten może wyglądać następująco:
- $W(X)(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 + 6 + 1 = 7.$
- $W(X)(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -1 - 2 - 3 + 1 = -5$
- $W(X)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^3 - 2 \cdot \sqrt{2}^2 + 3 \cdot \sqrt{2} + 1 =$
  $2\sqrt{2} - 4 + 3\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} - 3$
- Można zauważyć, że wielomian w świecie liczb rzeczywistych jest liczbą rzeczywistą.

Przykłady c.d.

- Niech $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Niech $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych. Weźmy "identyczne" stałe jak poprzednio: $n = 3$ i $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 3,\ a_2 \equiv -2,\ a_3 \equiv 1$. Wielomian $W(X)$ w zapisie wygląda identycznie jak poprzednio: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.

Przykłady c.d.

- Niech $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Niech $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych. Weźmy "identyczne" stałe jak poprzednio: $n = 3$ i $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 3,\ a_2 \equiv -2,\ a_3 \equiv 1$. Wielomian $W(X)$ w zapisie wygląda identycznie jak poprzednio: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- Jak wyglądają taki wielomian w świecie A?

Przykłady c.d.

- Niech $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Niech $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych. Weźmy "identyczne" stałe jak poprzednio: $n = 3$ i $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 3,\ a_2 \equiv -2,\ a_3 \equiv 1$. Wielomian $W(X)$ w zapisie wygląda identycznie jak poprzednio: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- Jak wyglądają taki wielomian w świecie A?
- Niech $x \in \mathbb{R}$. Ewaluujemy wielomian w punkcie $Id_{\mathbb{R}}$.

$$[W(X)(Id_{\mathbb{R}})](x) = [Id_{\mathbb{R}}^3 + (-2) \cdot Id_{\mathbb{R}}^2 + 3 \cdot Id_{\mathbb{R}} + 1](x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

Przykłady c.d.

- Niech $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Niech $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych. Weźmy "identyczne" stałe jak poprzednio: $n = 3$ i $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 3,\ a_2 \equiv -2,\ a_3 \equiv 1$. Wielomian $W(X)$ w zapisie wygląda identycznie jak poprzednio: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- Jak wyglądają taki wielomian w świecie A?
- Niech $x \in \mathbb{R}$. Ewaluujemy wielomian w punkcie $Id_{\mathbb{R}}$.

  $$[W(X)(Id_{\mathbb{R}})](x) = [Id_{\mathbb{R}}^3 + (-2) \cdot Id_{\mathbb{R}}^2 + 3 \cdot Id_{\mathbb{R}} + 1](x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

- Zatem $W(X)(Id_{\mathbb{R}})$ to rzeczywista funcja wielomianowa.

Przykłady c.d.

- Niech $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Niech $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych. Weźmy "identyczne" stałe jak poprzednio: $n = 3$ i $a_0 \equiv 1, \; a_1 \equiv 3, \; a_2 \equiv -2, \; a_3 \equiv 1$. Wielomian $W(X)$ w zapisie wygląda identycznie jak poprzednio: $1 \cdot X^3 + (-2) \cdot X^2 + 3 \cdot X + 1$.
- Jak wyglądają taki wielomian w świecie A?
- Niech $x \in \mathbb{R}$. Ewaluujemy wielomian w punkcie $Id_{\mathbb{R}}$.

$$[W(X)(Id_{\mathbb{R}})](x) = [Id_{\mathbb{R}}^3 + (-2) \cdot Id_{\mathbb{R}}^2 + 3 \cdot Id_{\mathbb{R}} + 1](x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

- Zatem $W(X)(Id_{\mathbb{R}})$ to rzeczywista funcja wielomianowa.
- Istnieje wzajemna jednoznaczność pomiędzy funkcjami wielomianowymi, a wielomianami.
  Jeśli mamy dany wielomian $W(X)$, to $w = W(X)(Id_{\mathbb{R}})$.
  Współczynniki $a_0, a_1, ..., a_n$ funkcji wielomianowej w wyznaczają wielomian jednoznacznie. Dlatego często wielomiany utożsamia się ze skończonymi ciągami stałych $(a_i)_{i=0}^{n}$.

Jeszcze jeden przykład

Weźmy identyczny model jak poprzednio. Tym razem ewaluujemy wielomian $W(X)$ w funkcji wielomianowej $f(x) = x^2 - 1$.

Jeszcze jeden przykład

Weźmy identyczny model jak poprzednio. Tym razem ewaluujemy wielomian $W(X)$ w funkcji wielomianowej $f(x) = x^2 - 1$.

- $[W(X)(f)](x) = [f^3 + (-2) \cdot f^2 + 3 \cdot f + 1](x) = (x^2 - 1)^3 - 2(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) + 1 = (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) - 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^2 - 3 + 1 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 - 2x^4 + 4x^2 - 2 + 3x^2 - 2 = x^6 - 5x^4 + 10x^2 - 5.$

Jeszcze jeden przykład

Weźmy identyczny model jak poprzednio. Tym razem ewaluujemy wielomian $W(X)$ w funkcji wielomianowej $f(x) = x^2 - 1$.

- $[W(X)(f)](x) = [f^3 + (-2) \cdot f^2 + 3 \cdot f + 1](x) = (x^2 - 1)^3 - 2(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) + 1 = (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) - 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^2 - 3 + 1 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 - 2x^4 + 4x^2 - 2 + 3x^2 - 2 = x^6 - 5x^4 + 10x^2 - 5.$
- Jeśli oznaczymy $w(x) = [W(X)(Id_{\mathbb{R}})](x)$, to łatwo zauważyć, że $[W(X)(f)](x) = (w \circ f)(x) = w(f(x))$.

Jeszcze jeden przykład

Weźmy identyczny model jak poprzednio. Tym razem ewaluujemy wielomian $W(X)$ w funkcji wielomianowej $f(x) = x^2 - 1$.

- $[W(X)(f)](x) = [f^3 + (-2) \cdot f^2 + 3 \cdot f + 1](x) = (x^2 - 1)^3 - 2(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) + 1 = (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) - 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^2 - 3 + 1 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 - 2x^4 + 4x^2 - 2 + 3x^2 - 2 = x^6 - 5x^4 + 10x^2 - 5.$
- Jeśli oznaczymy $w(x) = [W(X)(Id_{\mathbb{R}})](x)$, to łatwo zauważyć, że $[W(X)(f)](x) = (w \circ f)(x) = w(f(x))$.
- Jako, że złożenie funkcji wielomianowych jest funkcją wielomianową, to wielomian ewaluowany w dowolnej funkcji wielomianowej, jest funkcją wielomianową.

Kolejny przykład

Weźmy teraz podobny model. Dalej zakładamy, że $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Wciąż $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych.

Kolejny przykład

Weźmy teraz podobny model. Dalej zakładamy, że $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Wciąż $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych.

- Weźmy wielomian $W(X) = X^2 + (-2) \cdot X + 1$. Ewaluujmy go najpierw w $Id_{\mathbb{R}}$. Otrzymamy oczywiście funkcję kwadratową $x^2 - 2x + 1$.

Kolejny przykład

Weźmy teraz podobny model. Dalej zakładamy, że $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Wciąż $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych.

- Weźmy wielomian $W(X) = X^2 + (-2) \cdot X + 1$. Ewaluujmy go najpierw w $Id_{\mathbb{R}}$. Otrzymamy oczywiście funkcję kwadratową $x^2 - 2x + 1$.
- Podstawmy teraz pod X funkcję $f(x) = x^2$. Otrzymamy funkcję dwukwadratową $x^4 - 2x^2 + 1$.

Kolejny przykład

Weźmy teraz podobny model. Dalej zakładamy, że $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Wciąż $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych.

- Weźmy wielomian $W(X) = X^2 + (-2) \cdot X + 1$. Ewaluujmy go najpierw w $Id_{\mathbb{R}}$. Otrzymamy oczywiście funkcję kwadratową $x^2 - 2x + 1$.
- Podstawmy teraz pod X funkcję $f(x) = x^2$. Otrzymamy funkcję dwukwadratową $x^4 - 2x^2 + 1$.
- Szukając pierwiastków równania $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, stosuje się podstawienie $t = x^2$, sprowadzając je do równania kwadratowego $t^2 - 2t + 1 = 0$. Łatwo zauważyć, że ogólnie równanie $w(f(x)) = 0$ można sprowadzić podstawieniem $t = f(x)$ do równania $w(t) = 0$. A potem, o ile jest to możliwe, odzyskać x po wyliczeniu t.

Kolejny przykład

Weźmy teraz podobny model. Dalej zakładamy, że $A = \mathbb{R}[x]$, $B = \mathbb{R}_0[x]$. Wciąż $+$ i $\cdot$ będą naturalnymi działaniami arytmetycznymi na zbiorze funkcji rzeczywistych.

- Weźmy wielomian $W(X) = X^2 + (-2) \cdot X + 1$. Ewaluujmy go najpierw w $Id_{\mathbb{R}}$. Otrzymamy oczywiście funkcję kwadratową $x^2 - 2x + 1$.
- Podstawmy teraz pod X funkcję $f(x) = x^2$. Otrzymamy funkcję dwukwadratową $x^4 - 2x^2 + 1$.
- Szukając pierwiastków równania $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, stosuje się podstawienie $t = x^2$, sprowadzając je do równania kwadratowego $t^2 - 2t + 1 = 0$. Łatwo zauważyć, że ogólnie równanie $w(f(x)) = 0$ można sprowadzić podstawieniem $t = f(x)$ do równania $w(t) = 0$. A potem, o ile jest to możliwe, odzyskać x po wyliczeniu t.
- Zauważmy, że takich równań nie można rozwiązywać na wielomianach.

Definicja

Mówimy, ze dwa wielomiany $W(X)$, $R(X)$ są równe, gdy oba posiadaja identyczne formuły. Tzn. odpowiednie stałe a_i są dla obu wielomianów takie same.

To tłumaczy dleczego wielomiany utożsamiamy z ciągami stałych $(a_i)_{i=0}^{n}$.

Definicja

Mówimy, ze dwa wielomiany $W(X)$, $R(X)$ są równe, gdy oba posiadaja identyczne formuły. Tzn. odpowiednie stałe a_i są dla obu wielomianów takie same.

To tłumaczy dleczego wielomiany utożsamiamy z ciągami stałych $(a_i)_{i=0}^{n}$.

- Zauważmy, że funkcje wielomianowe możemy porównywać dwojako- albo funkcje muszą być równe na całej dziedzinie albo muszą być równe w pewnym punkcie dziedziny. W przypadku wielomianów porównania można dokonywać tylko tak, jak w definicji.

Wielowskaźnik

Definicja

Wielowskaźnikiem n-wymiarowym nazywamy wektor liczb ze zbioru $\mathbb{N}_0$ *postaci* $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$.
Długością multiindeksu α *nazywamy sumę współrzędnych* α*:* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *i oznaczamy symbolem* $|\alpha|$.
Jeśli $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *jest wektorem zmiennych, to definiujemy:*

$$x^\alpha = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

Wielowskaźnik

Definicja

Wielowskaźnikiem n-wymiarowym nazywamy wektor liczb ze zbioru $\mathbb{N}_0$ *postaci* $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$.
Długością multiindeksu α *nazywamy sumę współrzędnych* α*:* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *i oznaczamy symbolem* $|\alpha|$.
Jeśli $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *jest wektorem zmiennych, to definiujemy:*

$$x^\alpha = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

- Jeśli $\alpha = (1, 3, 4)$, a $x = (x, y, z)$, to $|\alpha| = 1 + 3 + 4 = 8$ oraz $x^\alpha = x \cdot y^3 \cdot z^4$.

Wielowskaźnik

Definicja

Wielowskaźnikiem n-wymiarowym nazywamy wektor liczb ze zbioru $\mathbb{N}_0$ *postaci* $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$.
Długością multiindeksu α *nazywamy sumę współrzędnych* α: $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *i oznaczamy symbolem* $|\alpha|$.
Jeśli $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *jest wektorem zmiennych, to definiujemy:*

$$x^\alpha = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

- Jeśli $\alpha = (1, 3, 4)$, a $x = (x, y, z)$, to $|\alpha| = 1 + 3 + 4 = 8$ oraz $x^\alpha = x \cdot y^3 \cdot z^4$.
- Jeśli $\alpha = (3, 0, 1)$ i $x = (x, y, z)$, to $|\alpha| = 4$, a $x^\alpha = x^3 \cdot z$.

Wielomiany wielowymiarowe

Definicja

Ustalamy kolekcje elementów A i B podobnie jak przy definicji wielomianu, na któych mamy wprowadzone działania + i $\cdot$. Wybieramy $m \in \mathbb{N}_0$. Wybieramy stałe a_α dla α (multiindeksów n-wymiarowych) takich, że $|\alpha| \leq m$ oraz co najmniej jedna ze stałych a_α jest niezerowa dla $|\alpha| = m$.
Niech $X = (X_1, X_2, ...X_n)$ będzie wektorem zmiennych. Wtedy formułę

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \cdot X^\alpha$$

nazywamy wielomianem n-wymiarowym stopnia m.

Przykład

- Niech $m = 2$, $n = 2$, $a_{(2,0)} = a_{(0,2)} = 1$, $a_{(1,1)} = a_{(1,0)} = a_{(0,1)} = 0$, $a_{(0,0)} = -1$, $X = (X, Y)$. Wtedy wielomian można zapisać następująco: $W(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$.

Przykład

- Niech $m = 2$, $n = 2$, $a_{(2,0)} = a_{(0,2)} = 1$, $a_{(1,1)} = a_{(1,0)} = a_{(0,1)} = 0$, $a_{(0,0)} = -1$, $X = (X, Y)$. Wtedy wielomian można zapisać następująco: $W(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$.
- Rozważmy powyższy wielomian w świecie funkcji trygonometrycznych.

$$W(X, Y)(cos(x), sin(x)) = cos^2(x) + sin^2(x) - 1 \equiv 0.$$

Przykład

- Niech $m = 2$, $n = 2$, $a_{(2,0)} = a_{(0,2)} = 1$, $a_{(1,1)} = a_{(1,0)} = a_{(0,1)} = 0$, $a_{(0,0)} = -1$, $X = (X, Y)$. Wtedy wielomian można zapisać następująco: $W(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$.
- Rozważmy powyższy wielomian w świecie funkcji trygonometrycznych.

$$W(X, Y)(cos(x), sin(x)) = cos^2(x) + sin^2(x) - 1 \equiv 0.$$

- Jeśli natomiast wybralibyśmy wielomian $R(X, Y) = 0$, to oczywiście $W(X, Y)(cos(x), sin(x)) \equiv R(X, Y)(cos(x), sin(x))$, mimo że W i R nie są równe.

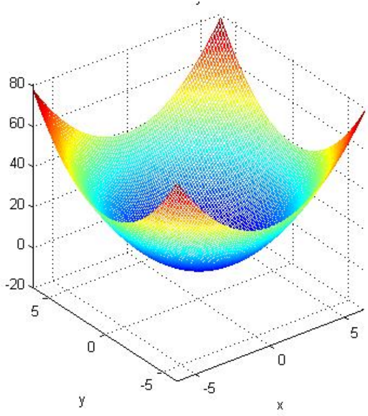
Przykład

- Niech $m = 2$, $n = 2$, $a_{(2,0)} = a_{(0,2)} = 1$, $a_{(1,1)} = a_{(1,0)} = a_{(0,1)} = 0$, $a_{(0,0)} = -1$, $X = (X, Y)$.
  Wtedy wielomian można zapisać następująco:
  $W(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$.
- Rozważmy powyższy wielomian w świecie funkcji trygonometrycznych.

$$W(X, Y)(cos(x), sin(x)) = cos^2(x) + sin^2(x) - 1 \equiv 0.$$

- Jeśli natomiast wybralibyśmy wielomian $R(X, Y) = 0$, to oczywiście
  $W(X, Y)(cos(x), sin(x)) \equiv R(X, Y)(cos(x), sin(x))$, mimo że W i R nie są równe.
- Zamiast podstawiać w miejsce X i Y, $cos(x)$ i $sin(x)$, podstawmy $Id_{\mathbb{R}}(x)$ i $Id_{\mathbb{R}}(y)$ odpowiednio.
  Dostaniemy funkcję wielomianową dwóch zmiennych postaci: $x^2 + y^2 - 1$.

Przyrównajmy ją do 0, to otrzymamy $x^2 + y^2 = 1$, czyli pierwiastki leżą na okręgu jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych.



Inny przykład

$n = 3,\ m = 4,\ X = (X, Y, Z),\ a_{(4,0,0)} = -1,\ a_{(3,0,0)} = 1,\ a_{(2,1,0)} = 2,\ a_{(1,1,1,)} = 1,\ a_{(0,0,3)} = -1,\ a_{(1,1,0)} = 2,\ a_{(0,1,1)} = -2,\ a_{(0,0,1)} = 3,\ a_{(0,0,0)} = -1$, pozostałe $a_\alpha = 0$.

$$W(X, Y, Z) = -X^4 + X^3 + 2X^2Y + XYZ - Z^3 + 2XY - 2YZ + 3Z - 1.$$

Inny przykład

$n = 3,\ m = 4,\ X = (X, Y, Z),\ a_{(4,0,0)} = -1,\ a_{(3,0,0)} = 1,\ a_{(2,1,0)} = 2,\ a_{(1,1,1,)} = 1,\ a_{(0,0,3)} = -1,\ a_{(1,1,0)} = 2,\ a_{(0,1,1)} = -2,\ a_{(0,0,1)} = 3,\ a_{(0,0,0)} = -1$, pozostałe $a_\alpha = 0$.

$$W(X, Y, Z) = -X^4 + X^3 + 2X^2Y + XYZ - Z^3 + 2XY - 2YZ + 3Z - 1.$$

- Wyliczmy $W(X, Y, Z)$ dla wektora funkcji $(1, x, x^2)$:
  $W(X, Y, Z)(1, x, x^2) =$
  $-1+1+2x+x^3-x^6+2x-2x^3+3x^2-1 = -x^6-x^3+3x^2+4x-1$

Inny przykład

$n=3$, $m=4$, $X=(X,Y,Z)$, $a_{(4,0,0)}=-1$, $a_{(3,0,0)}=1$, $a_{(2,1,0)}=2$, $a_{(1,1,1,)}=1$, $a_{(0,0,3)}=-1$, $a_{(1,1,0)}=2$, $a_{(0,1,1)}=-2$, $a_{(0,0,1)}=3$, $a_{(0,0,0)}=-1$, pozostałe $a_\alpha=0$.

$$W(X,Y,Z)=-X^4+X^3+2X^2Y+XYZ-Z^3+2XY-2YZ+3Z-1.$$

- Wyliczmy $W(X,Y,Z)$ dla wektora funkcji $(1,x,x^2)$: $W(X,Y,Z)(1,x,x^2)=$ $-1+1+2x+x^3-x^6+2x-2x^3+3x^2-1=-x^6-x^3+3x^2+4x-1$
- Moglibyśmy też ewaluować ten wielomian w wektorze funkcji$(f(x),g(y),h(z))$, gdzie, każda z nich ma osobną dziedzinę.
  Innymi słowy każda zależy od innej zmiennej, czyli otrzymalibyśmy funkcję trzech zmiennych.
  Przykładowo, biorąc za każdą z nich identyczność, otrzymalibyśmy
  $-x^4+x^3+2x^2y+xyz-z^3+2xy-2yz+3z-1$.

Wielomiany symetryczne

Definicja

Wielomian wielowymiarowy nazywamy symetrycznym, jeśli po dowolnej zamianie kolejności zmiennych, otrzymamy ten sam wielomian (zakładamy przemienność dodawania i mnożenia).

Definicja

Wielomian wielowymiarowy nazywamy symetrycznym, jeśli po dowolnej zamianie kolejności zmiennych, otrzymamy ten sam wielomian (zakładamy przemienność dodawania i mnożenia).

- $W(X,Y) = X^2+2XY+Y^2-1 = Y^2+2YX+X^2-1 = W(Y,X)$. Zatem $W(X,Y)$ jest symetryczny.

Definicja

Wielomian wielowymiarowy nazywamy symetrycznym, jeśli po dowolnej zamianie kolejności zmiennych, otrzymamy ten sam wielomian (zakładamy przemienność dodawania i mnożenia).

- $W(X,Y) = X^2+2XY+Y^2-1 = Y^2+2YX+X^2-1 = W(Y,X)$. Zatem $W(X,Y)$ jest symetryczny.
- $W(X,Y,Z) = X+Y+Z-XYZ$ jest również symetryczny.

Wielomiany symetryczne Viete'a

Definicja

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. *Niech* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$. *Wtedy wielomiany:*

$$W_{1,n}(X) = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

$$W_{2,n}(X) = X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_1X_n + X_2X_3 + X_2X_4 + ... + X_{n-1}X_n,$$

$$\vdots$$

$$W_{n,n}(X) = X_1X_2X_3 \cdot ... \cdot X_n,$$

nazywamy wielomianami Viete'a.
Łatwo zauważyć, że są one wszystkie symetryczne.

Wielomiany symetryczne Viete'a

Definicja

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$*. Niech* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$*. Wtedy wielomiany:*

$$W_{1,n}(X) = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

$$W_{2,n}(X) = X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_1X_n + X_2X_3 + X_2X_4 + ... + X_{n-1}X_n,$$

$$\vdots$$

$$W_{n,n}(X) = X_1X_2X_3 \cdot ... \cdot X_n,$$

nazywamy wielomianami Viete'a.
Łatwo zauważyć, że są one wszystkie symetryczne.

- Niech $n = 2$. Wtedy $W_{1,2}(X_1, X_2) = X_1 + X_2$.
  Natomiast $W_{2,2}(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$.
  Jeśli będziemy ewaluować te wielomiany w punkcie(x_1, x_2), to otrzymamy $x_1 + x_2$ i $x_1 \cdot x_2$ odpowiednio.

Wzory Viete'a

Twierdzenie (Viete)

Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *będzie funkcją wielomianową stopnia* $n (a_n \neq 0)$*. Niech* $x_1, x_2, ..., x_n$ *będą pierwiastkami funkcji wielomianowej* $w(x)$*. Wtedy*

$$W_{i,n}(X_1, X_2, ..., X_n)(x_1, x_2, ..., x_n) = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}, \text{ dla } i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Wzory Viete'a

Twierdzenie (Viete)

Niech $w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *będzie funkcją wielomianową stopnia* $n (a_n \neq 0)$. *Niech* $x_1, x_2, ..., x_n$ *będą pierwiastkami funkcji wielomianowej* $w(x)$. *Wtedy*

$$W_{i,n}(X_1, X_2, ..., X_n)(x_1, x_2, ..., x_n) = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}, \ \textit{dla}\ i = 1, 2, 3, ..., n.$$

- Weźmy trójmian kwadratowy: $w(x) = ax^2 + bx + c$. Załóżmy, że istnieją pierwiastki x_1, x_2. Wtedy wzory Viete'a mówią, że:
  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Inny przykład

Niech $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Załóżmy, że pierwiastki tego wielomianu istnieją i wynoszą x_1, x_2 i x_3. Wtedy ze wzorów Viete'a mamy, że:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ oraz $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

Inny przykład

Niech $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Załóżmy, że pierwiastki tego wielomianu istnieją i wynoszą x_1, x_2 i x_3. Wtedy ze wzorów Viete'a mamy, że:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ oraz $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

- Z układu równań w postaci wzorów Viete'a czasami można określić pierwiastki danej funkcji wielomianowej, znając któreś z jej pierwiastków, choć z reguły jest to trudne. Najłatwiejsze jest to dla funkcji wielomianowych niskich stopni.

Inny przykład

Niech $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Załóżmy, że pierwiastki tego wielomianu istnieją i wynoszą x_1, x_2 i x_3. Wtedy ze wzorów Viete'a mamy, że:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ oraz $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

- Z układu równań w postaci wzorów Viete'a czasami można określić pierwiastki danej funkcji wielomianowej, znając któreś z jej pierwiastków, choć z reguły jest to trudne. Najłatwiejsze jest to dla funkcji wielomianowych niskich stopni.
- Dla jakich funkcji wielomianowych da się zawsze wskazać wszystkie pierwiastki?

Inny przykład

Niech $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Załóżmy, że pierwiastki tego wielomianu istnieją i wynoszą x_1, x_2 i x_3. Wtedy ze wzorów Viete'a mamy, że:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ oraz $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

- Z układu równań w postaci wzorów Viete'a czasami można określić pierwiastki danej funkcji wielomianowej, znając któreś z jej pierwiastków, choć z reguły jest to trudne. Najłatwiejsze jest to dla funkcji wielomianowych niskich stopni.
- Dla jakich funkcji wielomianowych da się zawsze wskazać wszystkie pierwiastki?
- Odpowiedź na to pytanie dał Galois. Zawsze da się wyznaczyć pierwiastki dla funkcji wielomianowych stopnia co najwyżej 4. Dla wyższych stopni trzeba mieć szczęście.

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$
- Następnie stosujemy podstawienie $y = t - \frac{-\frac{13}{12}}{3t}$.

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$
- Następnie stosujemy podstawienie $y = t - \frac{-\frac{13}{12}}{3t}$.
- Po podstawieniu i kilku rachunkach dostaniemy
  $t^3 + \frac{13^3}{12^3 \cdot 3^3 \cdot t^3} + \frac{35}{108}$

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$
- Następnie stosujemy podstawienie $y = t - \frac{-\frac{13}{12}}{3t}$.
- Po podstawieniu i kilku rachunkach dostaniemy
  $t^3 + \frac{13^3}{12^3 \cdot 3^3 \cdot t^3} + \frac{35}{108}$
- Przyrównajmy to do 0 i pomnóżmy przez t^3, a następnie podstawmy $u = t^3$.

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$
- Następnie stosujemy podstawienie $y = t - \frac{-\frac{13}{12}}{3t}$.
- Po podstawieniu i kilku rachunkach dostaniemy
  $t^3 + \frac{13^3}{12^3 \cdot 3^3 \cdot t^3} + \frac{35}{108}$
- Przyrównajmy to do 0 i pomnóżmy przez t^3, a następnie podstawmy $u = t^3$.
- Otrzymamy $u^2 + \frac{35}{108}u + \frac{13^3}{36^3} = 0$.

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$
- Następnie stosujemy podstawienie $y = t - \frac{-\frac{13}{12}}{3t}$.
- Po podstawieniu i kilku rachunkach dostaniemy
  $t^3 + \frac{13^3}{12^3 \cdot 3^3 \cdot t^3} + \frac{35}{108}$
- Przyrównajmy to do 0 i pomnóżmy przez t^3, a następnie podstawmy $u = t^3$.
- Otrzymamy $u^2 + \frac{35}{108}u + \frac{13^3}{36^3} = 0$.
- Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, po rozwiązaniu którego możemy wyliczyć pierwiastki.

Wzory Cardano

Niech $w(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

- Stosujemy podstawienie $x = y - \frac{-2}{3}$ $(y - \frac{a_{n-1}}{n})$, aby wykasować wyraz z drugą potęgą.
  $(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{4}(y + \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} =$
  $y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = y^3 - \frac{13}{12}y + \frac{135}{108}$
- Następnie stosujemy podstawienie $y = t - \frac{-\frac{13}{12}}{3t}$.
- Po podstawieniu i kilku rachunkach dostaniemy
  $t^3 + \frac{13^3}{12^3 \cdot 3^3 \cdot t^3} + \frac{35}{108}$
- Przyrównajmy to do 0 i pomnóżmy przez t^3, a następnie podstawmy $u = t^3$.
- Otrzymamy $u^2 + \frac{35}{108}u + \frac{13^3}{36^3} = 0$.
- Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, po rozwiązaniu którego możemy wyliczyć pierwiastki.
- Powiedzmy, że możemy :)

Schemat Hornera

Ile działań potrzebujemy wykonać, żeby obliczyć wielomian w jakimś punkcie(podstawiamy liczbę)?

Ile działań potrzebujemy wykonać, żeby obliczyć wielomian w jakimś punkcie(podstawiamy liczbę)?

- Aby wykonać wszystkie potęgowania potrzebujemy $(n-1)+(n-2)+...+1$ mnożeń. Aby odpowiednie potęgi x wymnożyć przez stałe, potrzebujemy n mnożeń. Potem zostaje jeszcze n dodawań.
  Razem daje to $\frac{n(n-1)}{2}+2n=0,5n^2+1,5n$ działań.
  Wyobraźmy sobie, że mamy wielomian stopnia 10^{12}.
  Potrzebujemy wtedy $5\cdot 10^{23}+1,5\cdot 10^{12}$ działań.

Schemat Hornera

Ile działań potrzebujemy wykonać, żeby obliczyć wielomian w jakimś punkcie(podstawiamy liczbę)?

- Aby wykonać wszystkie potęgowania potrzebujemy $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$ mnożeń. Aby odpowiednie potęgi x wymnożyć przez stałe, potrzebujemy n mnożeń. Potem zostaje jeszcze n dodawań.
  Razem daje to $\frac{n(n-1)}{2}+2n = 0,5n^2+1,5n$ działań.
  Wyobraźmy sobie, że mamy wielomian stopnia 10^{12}.
  Potrzebujemy wtedy $5 \cdot 10^{23} + 1,5 \cdot 10^{12}$ działań.
- Chcielibyśmy to zrobić szybciej.

Schemat Hornera c.d.

Weźmy funkcję $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. Zapiszemy ją sprytnie: $x(2x^2 + 4x + 6) + 7 = x(x(2x + 4) + 6) + 7$. Zauważmy, że w końcowej formie wykonujemy na zmianę dodawanie i mnożenie. Wykonujemy tutaj $2n$ operacji.Postępując podobnie w ogólnym przypadku, gdybyśmy mieli do czynienia z wielomianem stopnia 10^{12}, to potrzebowalibyśmy tylko $2 \cdot 10^{12}$ operacji, co jest DUŻO szybsze niż brootforce'owy algorytm.

Schemat Hornera c.d.

Weźmy funkcję $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. Zapiszemy ją sprytnie: $x(2x^2 + 4x + 6) + 7 = x(x(2x + 4) + 6) + 7$. Zauważmy, że w końcowej formie wykonujemy na zmianę dodawanie i mnożenie. Wykonujemy tutaj $2n$ operacji.Postępując podobnie w ogólnym przypadku, gdybyśmy mieli do czynienia z wielomianem stopnia 10^{12}, to potrzebowalibyśmy tylko $2 \cdot 10^{12}$ operacji, co jest DUŻO szybsze niż brootforce'owy algorytm.

- Ogólnie schemat Hornera możemy zapisać następująco: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 =$ $x(x(...(x(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2})...) + a_1) + a_0$

Twierdzenie Stone'a - Weierstrassa

Twierdzenie (Stone-Weierstrass)

Każdą funkcję ciągłą f na przedziale $[a, b]$ można przybliżyć jednostajnie funkcją wielomianową w z dowolną dokładnością.

Twierdzenie (Stone-Weierstrass)

Każdą funkcję ciągłą f na przedziale $[a, b]$ można przybliżyć jednostajnie funkcją wielomianową w z dowolną dokładnością.

- Innymi słowy, jeśli wybierzemy dowolnie małą liczbę $\varepsilon > 0$ (np.$0,0001$), to jesteśmy w stanie znaleźć taką funkcję w, że $\forall_{x\in[a,b]}|f(x) - w(x)| < \varepsilon$, czyli w pasku o grubości 2ε wokół funkcji f jesteśmy w stanie zmieścić pewną funkcję wielomianową w.

Wzory Taylora

Niektóre, porządne funkcje można bardzo dobrze aproksymować wielomianami za pomocą wzorów Taylora.

Wzory Taylora

Niektóre, porządne funkcje można bardzo dobrze aproksymować wielomianami za pomocą wzorów Taylora.

Definicja (Silnia)

Operację silnii oznaczamy symbolem $n!$ dla $n \in \mathbb{N}$. $0! = 1$*,*
Określamy $n! = n \cdot (n-1)!$, dla $n = 1, 2, 3, ...$.

- Zatem $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Wzory Taylora

Niektóre, porządne funkcje można bardzo dobrze aproksymować wielomianami za pomocą wzorów Taylora.

Definicja (Silnia)

Operację silnii oznaczamy symbolem $n!$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. $0! = 1$, *Określamy* $n! = n \cdot (n-1)!$, *dla* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

- Zatem $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
- $$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}$$

Wzory Taylora

Niektóre, porządne funkcje można bardzo dobrze aproksymować wielomianami za pomocą wzorów Taylora.

Definicja (Silnia)

Operację silnii oznaczamy symbolem $n!$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. $0! = 1$, *Określamy* $n! = n \cdot (n-1)!$, *dla* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

- Zatem $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
- $$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad \textit{dla pewnego } n \in \mathbb{N}$$
- $$sin(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \textit{dla pewnego } n \in \mathbb{N}$$
  $$cos(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \textit{dla pewnego } n \in \mathbb{N}$$

Dziekuję za uwagę!